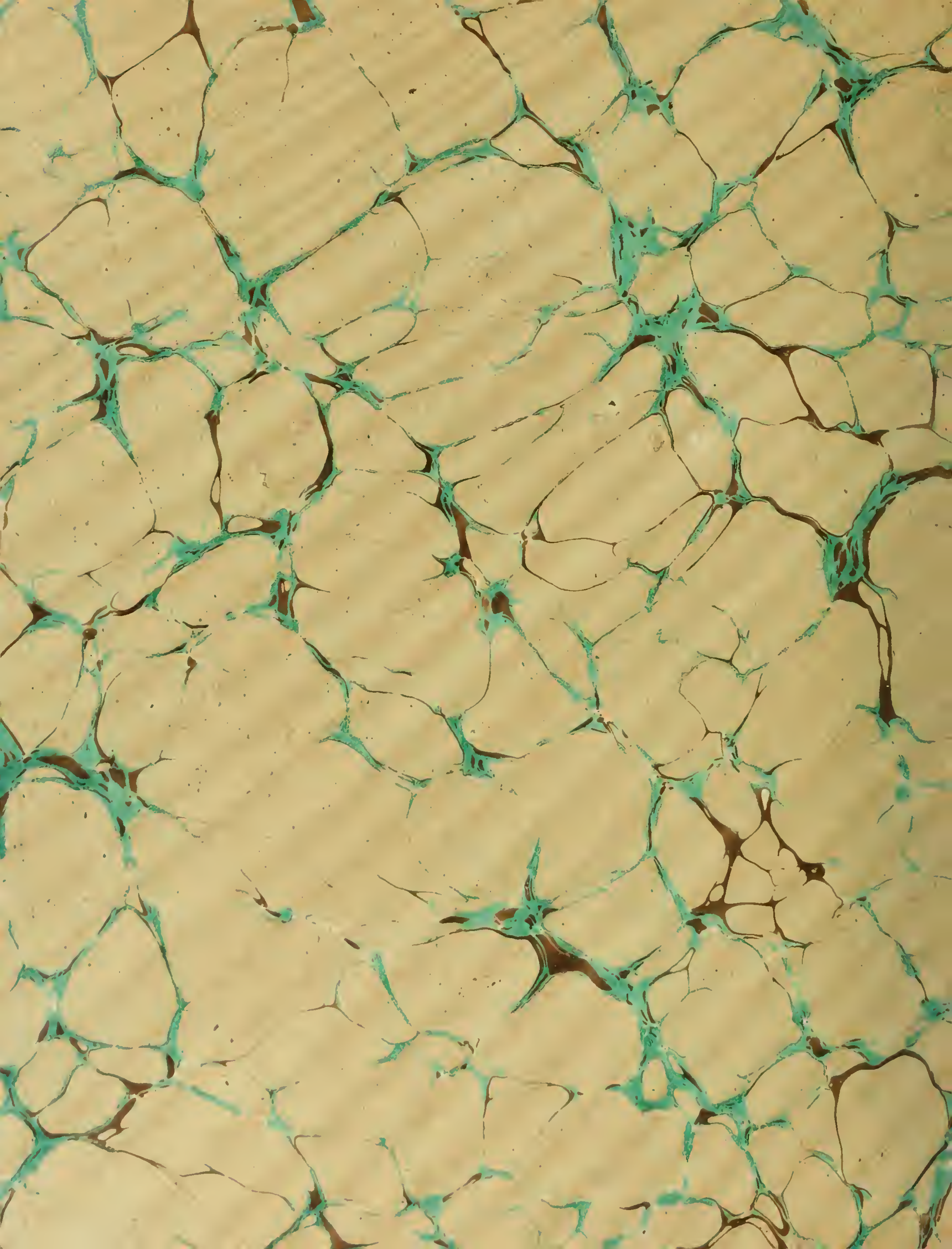
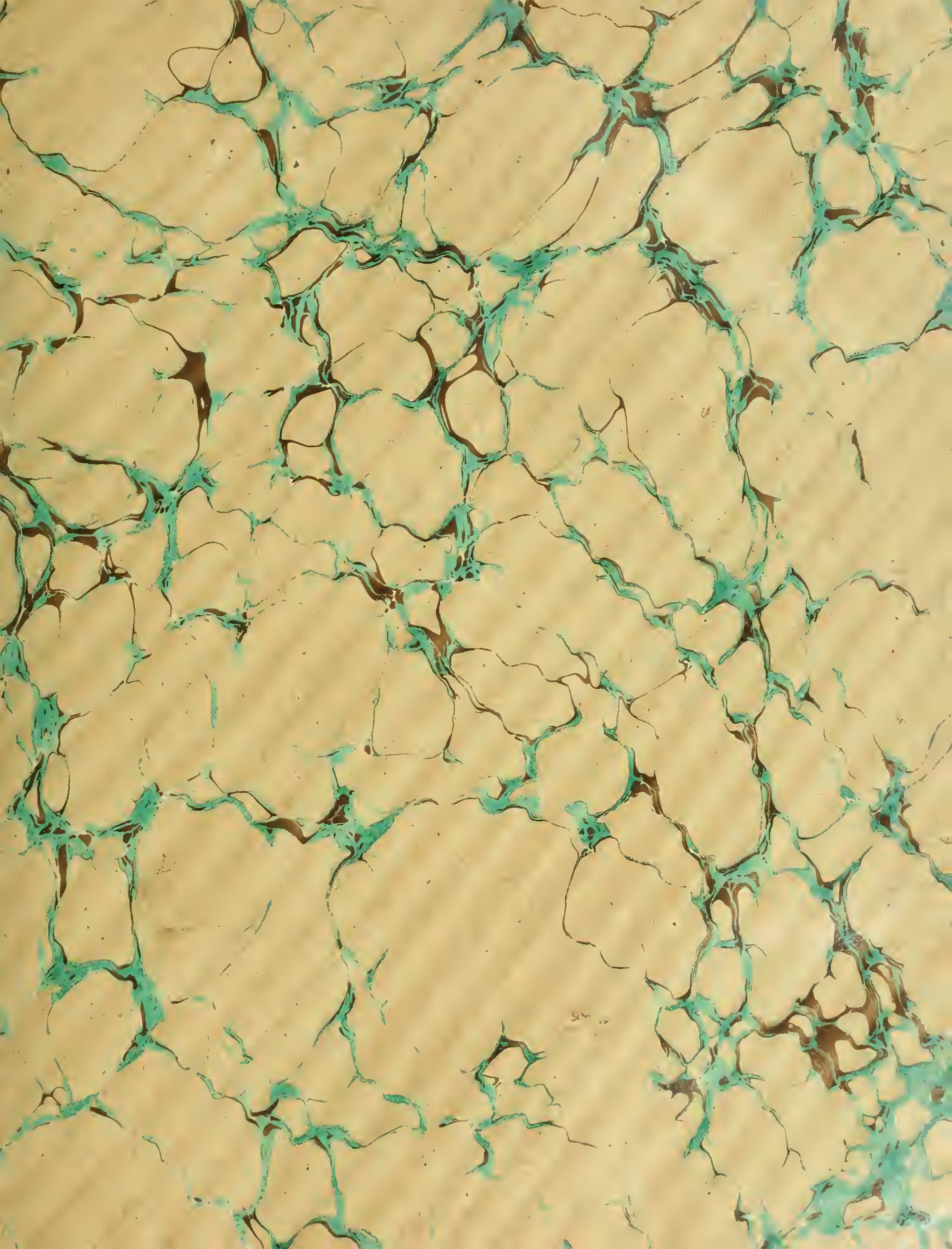






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME IV. — ANNÉE 1859.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, n° 55.

1859

TABLE DES MATIÈRES,

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME IV.

Pages

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; par M. *J. Liouville*. (Septième article.) 1

Considérations sur les Porismes en général et sur ceux d'Euclide en particulier. Examen et réfutation de l'interprétation donnée par M. Breton (de Champ) aux textes de Pappus et de Proclus relatifs aux Porismes; par *A.-J.-H. Vincent* 9

Sur la forme $x^2 + y^2 + 5(z^2 + t^2)$; par M. *J. Liouville* 47

Note sur le nombre des coniques qui sont déterminées par cinq conditions, lorsque, parmi ces conditions, il existe des normales données. — Construction de ces coniques. — Théorèmes relatifs aux contacts d'une série de coniques et d'un faisceau de droites; par M. *E. de Jonquières* 49

Mémoire sur la poussée des terres avec ou sans surcharge; par M. *Saint-Guilhem* 57

Sur une équation différentielle; par M. *Besge* 72

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; par M. *J. Liouville*. (Huitième article.) 73

Solution de deux problèmes de géométrie à trois dimensions; par M. *E. de Jonquières* 81

Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite; par M. *A. Mannheim* . . 93

Démonstration de l'irréductibilité de l'équation aux racines primitives de l'unité; par M. *V.-A. Lebesgue* 105

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; par M. *J. Liouville* (Neuvième article.) 111

Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; par M. *Maximilien Marie*. (Deuxième partie.) 121

Pages.
Question des porismes. [Extrait d'une Lettre de M. Breton (de Champ) à M. Liouville]. 153
Sur une intégrale définie multiple ; par M. *J. Liouville*. 155
Sur la quantité de mouvement qui est transmise à un corps par le choc d'un point massif qui vient le frapper dans une direction donnée; par M. *Poinsot*. 161
Sur la manière de ramener à la dynamique des corps libres, celle des corps qu'on suppose gênés par des obstacles fixes; par M. *Poinsot*. 171
Des centres de courbure successifs; par M. *J.-N. Haton de la Goupillière*. . . . 183
Sur les intégrales trinômes; par M. *Besge*. 194
Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; par M. *J. Liouville*. (Dixième article.). 195
Méthode pour la résolution des équations littérales du troisième et du quatrième degré; par M. *Jourdain*. 205
Sur la réduction des formes quadratiques positives à trois indéterminées entières; par M. *G. Lejeune-Dirichlet*. 209
Sur la possibilité de la décomposition des nombres en trois carrés; par M. *G. Lejeune-Dirichlet*. (Traduit de l'allemand par M. *J. Houel*.). 233
Note sur une classe particulière de surfaces à aire minima; par M. *Ernest Lamarle*. 241
Théorèmes relatifs aux formes binaires quadratiques qui représentent les mêmes nombres; par M. *Schering*. 253
Théorème arithmétique; par M. *J. Liouville*. 271
Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville; par M. *Ferdinand Minding*. . . 273
Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; par M. *J. Liouville*. (Onzième article.). 281
Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; par M. *Maximilien Marie*. (Suite.). 305
Sur l'équation générale du $n^{ième}$ degré à deux variables dans laquelle on fait varier un des coefficients; par M. *Woepcke*. 329
Sur une classe de fonctions qui peuvent s'exprimer rationnellement les unes par les autres; par M. *Woepcke*. 339
Sur les lignes de courbure et les lignes géodésiques des surfaces développables dont les génératrices sont parallèles à celles d'une surface réglée quelconque; par M. *H. Molins*. 347
Nombre de solutions d'une congruence du premier degré à plusieurs inconnues; par M. *V.-A. Le Besgue*. 366
Sur le caractère biquadratique du nombre 2; extrait d'une Lettre de M. Dirichlet à M. Stern. (Traduction de M. *Houel*.) 367
Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; par M. *Maximilien Marie* (Suite). 369
De la composition des formes binaires du second degré; par M. *G. Lejeune-Dirichlet*. 389

Pages.

Théorème concernant les nombres premiers de la forme $24\mu + 7$; par M. *J. Liouville*. 399

Sur la première démonstration donnée par Gauss de la loi de réciprocité dans la théorie des résidus quadratiques; par M. *Lejeune-Dirichlet*. (Traduction de M. *Hoüel*.). 401

QUESTIONS DYNAMIQUES. — *Sur la percussion des corps*. — Percussion d'un corps animé par des forces quelconques; par M. *Poinsot*. 421

FUNÉRAILLES DE M. POINSOT. — Discours de M. Bertrand. — Discours de M. Mathieu. 427-429

ERRATA

Page 120, ligne 2, *au lieu de* $\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = -24$, *lisez* $\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = -48$.

Page 284, ligne 19, *au lieu de* $\rho(2m - i)^2$, *lisez* $\rho(2m - i^2)$.

Page 299, ligne 11, *au lieu de* $7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$,

lisez $7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

SEPTIÈME ARTICLE.

Je continue dans ce volume la série d'articles que j'ai commencée sous le même titre dans le volume précédent. On a vu comment en partageant un nombre en deux ou en plusieurs parties entières, qu'on décompose ensuite elles-mêmes en un produit de deux facteurs, on arrive à des formules d'un genre singulier, dont l'utilité dans la théorie des nombres est manifeste. Ces formules trouveront aussi leur usage dans la théorie des suites infinies, qui n'est au fond qu'une dépendance de la théorie des fonctions numériques. Prenons, par exemple, la formule

$$(a)\ \sum\left\{\sum\sum\left[f(d'-d'')-f(d'+d'')\right]\right\}=2^{\alpha-1}\sum d\left[f(0)-f(2^\alpha d)\right],$$

de notre deuxième article (Cahier de mai 1858, p. 194), laquelle se rapporte à la décomposition d'un nombre pair $p=2^\alpha m=2^\alpha d\delta$ en deux entiers impairs m', m'', en sorte que

$$p=m'+m''=d'\delta'+d''\delta''.$$

En multipliant par x^p les deux membres de l'équation (a) et faisant la somme pour $p=2, 4, 6,\ldots,$ à l'infini, on en conclura sans peine

une équation concernant une classe très-étendue de séries doubles que l'on ramène à une série simple, à savoir on a

$$(\alpha)\qquad \sum\sum \frac{[f(s'-s'')-f(s'+s'')]\,x^{s'+s''}}{(1-x^{2s'})(1-x^{2s''})} = \sum \frac{s[f(0)-f(2s)]\,x^{2s}}{1-x^{4s}}.$$

L'équation (α) comprend comme cas particuliers plusieurs formules de la théorie des fonctions elliptiques. On suppose la fonction f telle, que $f(s''-s')=f(s'-s'')$. Quant à x, c'est une variable indépendante; mais il faut bien entendu que les séries convergent. La double sommation au premier membre porte sur s' et sur s'', qui sont des nombres impairs variant de 1 à ∞, tandis que la sommation au second membre porte sur s, qui varie aussi de 1 à ∞, mais qui est indifféremment un nombre pair ou un nombre impair. Si l'on admet la formule (a), dont la démonstration directe est très-facile et complétement élémentaire [*], on vérifiera tout de suite l'exactitude de l'équation (α) en développant les deux membres suivant les puissances de x. Et, réciproquement, si la formule (α) est établie (et l'on peut en effet y arriver à priori par une analyse assez simple) la formule (a) s'ensuivra. Toutes les formules de nos six premiers articles sont ainsi propres à un double usage, et il en sera de même de celles que nous voulons y ajouter. Mais le moment n'est pas venu d'entrer à ce sujet dans de plus longs détails. A présent encore, je me contente, comme dans mes anciens articles, de poser des formules générales, et je n'indique d'applications qu'autant qu'il en faut pour bien fixer le sens de nos équations. Les développements ordonnés, et même les démonstrations, viendront plus tard.

Dans la nouvelle formule dont je vais d'abord parler, on considère un nombre quelconque pair ou impair, mais on ne met pas en évidence la puissance de 2 qui peut le diviser : on le désigne donc par la simple lettre m. Puis, comparant ce nombre aux carrés de grandeur moindre, on écrit, de toutes les manières possibles,

$$m = m'^2 + m'',$$

[*] J'ai donné, dans mon cours au Collége de France, cette démonstration, qui s'étend à la formule générale (b) de l'article cité, et même, avec de légères modifications, aux formules des trois articles suivants. Elle a pour base le fait arithmétique ou algébrique si bien mis en evidence par M. Dirichlet dans le cahier de mai 1856, p. 210.

m' étant un nombre entier pair ou impair, positif ou négatif, ou même zéro, tandis que m'' (qui peut être aussi pair ou impair) est essentiellement positif. Enfin, on décompose m'' en facteurs et l'on pose

$$m'' = 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

d'où il suit que

$$m = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

l'exposant α'' pouvant être nul, et d'', δ'' étant des entiers positifs impairs.

Maintenant formons la somme double

$$S = \sum\sum (-1)^{m''-1} F(2^{\alpha''} d'' + m'),$$

que l'on pourrait écrire, avec plus de netteté peut-être,

$$\sum \left[(-1)^{m''-1} \sum F(2^{\alpha''} d'' + m') \right],$$

et où les deux $\sum$ se rapportent successivement à tous les diviseurs d'' de chaque nombre m'', puis à tous les groupes (m', m''). Si l'on suppose la fonction $F(x)$ impaire, je veux dire si l'on suppose

$$F(0) = 0,$$

et

$$F(-x) = -F(x),$$

pour toutes les valeurs de x que l'on aura à employer, on trouvera sans peine la valeur de S. On a, en effet,

$$S = 0$$

quand m n'est pas un carré, tandis que

$$S = \sqrt{m} . F(\sqrt{m})$$

quand m est un carré.

En d'autres termes, on a

$$(\beta) \qquad \sum\sum (-1)^{m''-1} F(2^{\alpha''} d'' + m') = \sqrt{m} . F(\sqrt{m}), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Soit d'abord $m = 1$; on ne pourra faire que $m' = 0$, $m'' = 1$, $2^{\alpha''} d'' = 1$, et le premier membre donnera F(1), comme le second, l'unité étant un carré.

Soit ensuite $m = 2$; on pourra faire $m' = 0$, $m'' = 2$, $2^{\alpha''} d'' = 2$, et aussi $m' = 1$, $m'' = 1$, $2^{\alpha''} d'' = 1$, enfin $m' = -1$, $m'' = 1$, $2^{\alpha''} d'' = 1$. Et la valeur du premier membre, qui doit ici être nulle, sera en effet

$$-F(2) + F(2) + F(0) = F(0) = 0.$$

Pour $m = 3$, on devra trouver de même zéro, et c'est ce qui arrive d'après les valeurs de m', m'' et $2^{\alpha''} d''$, qui sont

$$m' = 0,\quad m'' = 3,\quad 2^{\alpha''} d'' = 3;\quad m' = 0,\quad m'' = 3,\quad 2^{\alpha''} d'' = 1;$$
$$m' = 1,\quad m'' = 2,\quad 2^{\alpha''} d'' = 2;\quad m' = -1,\quad m'' = 2,\quad 2^{\alpha''} d'' = 2:$$

d'où

$$F(3) + F(1) - F(3) - F(1) = 0.$$

Mais pour $m = 4$, qui est un carré, on devra trouver

$$2F(2).$$

Or ici les valeurs de m', m'', $2^{\alpha''} d''$ sont

$$m' = 0,\quad m'' = 4,\quad 2^{\alpha''} d'' = 4;$$
$$m' = 1,\quad m'' = 3,\quad 2^{\alpha''} d'' = 3;\quad m' = 1,\quad m'' = 3,\quad 2^{\alpha''} d'' = 1;$$
$$m' = -1,\quad m'' = 3,\quad 2^{\alpha''} d'' = 3;\quad m' = -1,\quad m'' = 3,\quad 2^{\alpha''} d'' = 1;$$

ce qui donne bien

$$-F(4) + F(4) + F(2) + F(2) + F(0) = 2F(2).$$

Une des valeurs les plus simples qu'on puisse prendre pour $F(x)$ est

$$F(x) = x.$$

La formule (β) se réduit alors à

$$\sum\sum (-1)^{m''-1} (2^{\alpha''} d'' + m') = m, \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré. Mais comme les valeurs de m', autres que zéro, sont deux à deux égales et de signes contraires, en sorte que chaque groupe (m', m'') est accompagné du groupe opposé $(-m', m'')$, la formule peut être réduite à

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}2^{\alpha''}d'' = m, \quad \text{ou} \quad = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Pour développer les conséquences curieuses que renferme cette équation, j'observerai d'abord que pour tout nombre *pair*, $m = 2^\alpha n = 2^\alpha d\delta$ (n, d et δ impairs), on a

$$\sum 2^\alpha d = 2^\alpha \sum d = 2^\alpha \zeta_1(n),$$

en désignant à l'ordinaire par $\zeta_1(n)$ la somme des diviseurs de n. D'un autre côté

$$\zeta_1(m) = (2^{\alpha+1}-1)\zeta_1(n)$$

et

$$\zeta_1\left(\frac{m}{2}\right) = (2^\alpha - 1)\zeta_1(n);$$

d'où

$$\zeta_1(m) - \zeta_1\left(\frac{m}{2}\right) = 2^\alpha \zeta_1(n).$$

Donc

$$\sum 2^\alpha d = \zeta_1(m) - \zeta_1\left(\frac{m}{2}\right).$$

Ceci, je le répète, suppose m pair. Pour m impair, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$, on aurait naturellement

$$\sum d = \zeta_1(m).$$

Cela posé, revenons à notre équation

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}2^{\alpha''}d'' = m, \quad \text{ou} \quad = 0,$$

et donnons à m' les valeurs successives que m' peut prendre, savoir

$$m' = 0, \quad m' = \pm 1, \quad m' = \pm 2, \ldots, \quad m' = \pm \mu,$$

μ^2 étant le plus grand carré au-dessous de m, car on ne pourrait pas prendre $\mu^2 = m$, même quand m est un carré, les valeurs de m'', savoir

$$m'' = m, \quad m'' = m - 1, \quad m'' = m - 4, \ldots, \quad m'' = m - \mu^2,$$

devant être essentiellement positives.

Soit d'abord m pair. La somme

$$\sum\sum (-1)^{m''-1} 2^{\alpha''} d''$$

commencera par un terme négatif répondant à $m' = 0$, $m'' = m$, lequel est égal à

$$-\sum 2^{\alpha} d,$$

c'est-à-dire à

$$-\left[\zeta_1(m) - \zeta_1\left(\frac{m}{2}\right)\right],$$

puisque m est pair.

Les deux termes qui correspondent à $m' = \pm 1$, $m'' = m - 1$, pour lesquels m'' est impair, fourniront ce total,

$$2\zeta_1(m-1).$$

Mais les suivants pour lesquels on a $m' = \pm 2$, $m'' = m - 4$, de sorte que m'' y est pair, donneront

$$-2\left[\zeta_1(m-4) - \zeta_1\left(\frac{m-4}{2}\right)\right];$$

ensuite viendra

$$2\zeta_1(m-9),$$

puis

$$-2\left[\zeta_1(m-16) - \zeta_1\left(\frac{m-16}{2}\right)\right],$$

et ainsi jusqu'à la valeur $m' = \pm \mu$ définie plus haut.

En changeant les signes, nous voyons donc que quand m est pair, la somme

$$\begin{array}{l} \zeta_1(m) - 2\zeta_1(m-1) + 2\zeta_1(m-4) - 2\zeta_1(m-9) + \ldots \\ -\zeta_1\left(\frac{m}{2}\right) \qquad\qquad\qquad - 2\zeta_1\left(\frac{m-4}{2}\right) \end{array}$$

prolongée tant que le nombre placé sous ζ_1 reste positif, est égale à $-m$ ou à o, suivant que m est ou n'est pas un carré.

C'est ainsi que l'on a

$$\zeta_1(2) - \zeta_1(1) - 2\zeta_1(1) = 3 - 1 - 2 = 0,$$

et

$$\zeta_1(4) - \zeta_1(2) - 2\zeta_1(3) = 7 - 3 - 2.4 = -4.$$

Soit ensuite m impair. Le premier terme de la somme

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}2^{\alpha''}d''$$

répondant à $m' = 0$, $m'' = m$, sera

$$\sum d,$$

ou $\zeta_1(m)$. Les deux suivants, qui répondent à $m' = \pm 1$, $m'' = m - 1$, et qui sont négatifs, donneront, puisque $m - 1$ est pair, ce total,

$$-2\left[\zeta_1(m-1) - \zeta_1\left(\frac{m-1}{2}\right)\right].$$

Pour $m' = \pm 2$, $m'' = m - 4$, on obtiendra, $m - 4$ étant impair,

$$2\zeta_1(m-4);$$

mais pour $m' = \pm 3$, $m'' = m - 9$, m'' pair, il viendra

$$-2\left[\zeta_1(m-9) - \zeta_1\left(\frac{m-9}{2}\right)\right]:$$

et ainsi de suite.

On voit donc que, pour tout nombre impair m, la somme

$$\zeta_1(m) - 2\zeta_1(m-1) + 2\zeta_1(m-4) - 2\zeta_1(m-9) + 2\zeta_1(m-16) - \ldots$$
$$+ 2\zeta_1\left(\frac{m-1}{2}\right) \qquad\qquad + 2\zeta_1\left(\frac{m-9}{2}\right)$$

qui ne doit être prolongée que jusqu'au moment où les nombres sous ζ_1 restent encore > 0, est égale à zéro quand m n'est pas un carré, tandis qu'elle est égale à m quand m est un carré.

Le nombre impair m ne peut être un carré qu'autant qu'il est de la forme $8\nu+1$. Si donc nous le prenons de la forme $8\nu+5$, ou bien encore de l'une des deux formes $8\nu+3$, $8\nu+7$, la somme citée sera toujours nulle. Dans le premier cas, savoir pour $m=8\nu+5$, en désignant par s un nombre impair, le quart de $m-s^2$ sera aussi un entier impair, d'où l'on conclura facilement qu'alors

$$\zeta_1(m-s^2)-\zeta_1\left(\frac{m-s^2}{2}\right)=4\zeta_1\left(\frac{m-s^2}{4}\right),$$

tandis que dans les deux autres cas ($m=8\nu+3$ ou $8\nu+7$), $m-s^2$ étant seulement le double d'un entier impair, on a

$$\zeta_1(m-s^2)-\zeta_1\left(\frac{m-s^2}{2}\right)=2\zeta_1\left(\frac{m-s^2}{2}\right).$$

Il s'ensuit que pour $m=8\nu+5$, on a cette équation

$$\begin{aligned}\zeta_1(m)+2\zeta_1(m-4)+2\zeta_1(m-16)+\ldots\\ =8\left[\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right)+\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right)+\ldots\right],\end{aligned}$$

tandis que pour $m=8\nu+3$ ou $8\nu+7$, on a celle-ci :

$$\begin{aligned}\zeta_1(m)+2\zeta_1(m-4)+2\zeta_1(m-16)+\ldots\\ =4\left[\zeta_1\left(\frac{m-1}{2}\right)+\zeta_1\left(\frac{m-9}{2}\right)+\ldots\right].\end{aligned}$$

Ceci conduit à des conséquences curieuses relativement à la décomposition des nombres en cinq carrés : j'en ferai l'objet d'une Note spéciale.

En voilà assez pour que le lecteur soit fixé sur le sens et la portée de la formule (β). Je me bornerai donc ici à dire que l'on obtient d'autres résultats importants en posant par exemple $F(x)=\sin xt$, où t désigne une constante à volonté.

CONSIDÉRATIONS

SUR

LES PORISMES EN GÉNÉRAL

ET SUR

CEUX D'EUCLIDE EN PARTICULIER.

Examen et réfutation de l'interprétation donnée par M. Breton (de Champ) aux textes de Pappus et de Proclus relatifs aux Porismes.

PAR A.-J.-H. VINCENT.

---

§ I.

Historique des derniers travaux. — État de la question.

1. Les lecteurs du *Journal de Mathématiques* se rappellent qu'en 1855 M. Breton (de Champ) publia, dans ce journal (t. XX, p. 209), un Mémoire intitulé : *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide*. Voici ce que j'écrivais quelque temps après, au sujet de ce Mémoire, dans une première *Notice* insérée au journal *La Science* (3e année, no 10, p. 885) :

« Je ne m'étais point encore occupé particulièrement des porismes, » lorsque M. Breton (de Champ) voulut bien me donner communica- » tion de l'intéressant travail qu'il avait exécuté sur cette question et » inséré au *Journal de Mathématiques* de M. Liouville. Après avoir pris » lecture de ce Mémoire, je m'empressai de dire à l'auteur, en lui » adressant mes remercîments, que s'il n'avait point complétement » dissipé l'obscurité qui régnait encore sur cette question difficile, il » me paraissait du moins dans une bonne voie, et qu'après avoir aussi » heureusement approché du but, il parviendrait sans aucun doute à » l'atteindre tout à fait. J'aurais donc laissé à M. Breton l'honneur » d'élucider entièrement cette curieuse branche de la géométrie an-

» cienne, si je n'avais remarqué ultérieurement que, par un acte de » modestie qui l'honore autant que son savoir, l'auteur semblait » appeler tout particulièrement la critique sur l'exactitude de sa tra- » duction des textes de Pappus et de Proclus. Or comme, en définitive, » c'est dans la fidélité de cette interprétation que gît véritablement le » nœud de la difficulté, j'ai entrepris de la refaire à nouveau.

» Je vais donc commencer par exposer mes propres traductions, » que je ferai suivre des observations nécessaires pour signaler les » points principaux dans lesquels je m'écarte de celles de M. Breton, » et tâcher de justifier l'opinion que m'a fait adopter un examen » scrupuleux des textes. »

Ici j'essayais une nouvelle traduction des textes de Pappus et de Proclus (*ibid; tiré à part*, p. 2-8).

2. Maintenant voici quelles étaient mes conclusions (*La Science*, p. 888, col. 2; *tiré à part*, p. 13):

« Après ces explications sur le véritable sens des textes de Pappus et » de Proclus, est-il nécessaire d'émettre une opinion sur la nature des » porismes? Il nous paraît évident que si l'on a prêté quelque atten- » tion aux annotations qui précèdent, on ne pourra se défendre de » tirer cette conclusion : que si les divers auteurs qui se sont occupés » des porismes sont tous plus ou moins parvenus à en apercevoir la » nature sous quelqu'une de ses faces, Schooten seul a su en pénétrer » à fond la véritable essence; et, comme le dit avec raison M. Bre- » ton [*] : « On doit regretter qu'il n'ait pas développé ses idées sur ce » sujet, et surtout qu'il n'ait pas dit comment, dans sa pensée, les » porismes tels qu'il les concevait, pouvaient servir à expliquer les » passages obscurs de Pappus et de Proclus ». »

Pour que ma pensée soit bien comprise, je crois devoir rappeler ici les termes mêmes dans lesquels M. Breton présente l'opinion de Schooten pour laquelle je me suis prononcé.

« La méthode suivie par l'auteur (par Schooten) pour découvrir » toutes ces propriétés, dit M. Breton [**], n'est autre chose que l'al-

[*] *Recherches nouvelles*, p. 256; T. P., p. 48.

[**] Ibid.

» gèbre appliquée à la géométrie. Il établit, à l'aide des théorèmes les » plus élémentaires de la géométrie, un petit nombre d'équations » très-simples entre les diverses lignes de la figure; puis, combinant » ces équations de diverses manières, il en déduit successivement de » nouveaux théorèmes.

» Il termine en disant : « Et ainsi (c'est Schooten qui parle), et » ainsi, en comparant entre elles les quantités de manière à obtenir » toujours de nouvelles équations, on pourra trouver d'innombrables » propriétés appartenant aux objets proposés ».»

Telle est la théorie de Schooten; seulement il est clair qu'au lieu de l'algèbre moderne il faut sous-entendre, de la part des Anciens, l'usage des proportions; et j'ajoute, quant à moi, que dans une foule de cas où il s'agissait exclusivement de relations de position, ce n'était pas même aux proportions qu'il fallait avoir recours, mais à de simples notions d'égalité et de superposition.

3. Je reviens à mes propres conclusions, dont je reprends la suite dans le journal *La Science :*

« On doit le voir, disais-je ensuite [*], la théorie des porismes est » bien simple : la seule chose sur laquelle il nous paraisse encore utile » d'insister, c'est l'inexactitude de la supposition généralement accré- » ditée, d'après laquelle l'idée de porisme ne peut se concevoir sans » celle d'indétermination, de mouvement, de *lieu décrit* ou *engendré*. » Il est vrai que l'on peut imaginer, en très-grand nombre, des po- » rismes qui conduisent à des lieux géométriques; mais ce n'est là » qu'un des accidents de leur nature, nullement inhérent à leur » essence. On peut même dire, au contraire, que si *le porisme ajoute » à l'hypothèse du théorème local* [**], par là-même il introduit la » détermination dans un problème qui, en soi, était indéterminé, et » que s'il trouve à se placer dans un lieu géométrique, ce n'est, en » quelque sorte, qu'en éliminant celui-ci, bien loin de le constituer [***]. » Nous pourrions faire des remarques analogues sur la théorie des

---

[*] *La Science*, ibid. T. I., p. 14.

[**] *Voir*, ci-après, annotation H.

[***] *Voir* ci-après, annotations T et U, ce qui est relatif au *segment capable*.

» Transversales, que l'on a cru et que l'on a pu jusqu'à un certain » point reconnaître dans la collection des Lemmes de Pappus. Nombre » de propositions appartenant à cette théorie s'y retrouvent avec évi- » dence ; mais elles ne s'y enchaînent pas de manière à constituer une » théorie proprement dite, comme dans la géométrie moderne. De là » à un traité de la *Corrélation des figures*, de leurs *Propriétés projec- » tives*, de là à une *Géométrie supérieure*, il y a encore loin.

» Nous ne doutons pas qu'avec de la patience on ne parvienne faci- » lement à mettre dans tout son jour la réalité de ces assertions. Le » moyen, pour arriver là, nous paraît simple, mais malheureusement » plus fastidieux que fructueux : ce serait de reprendre *un à un* tous » les lemmes de Pappus, et dans chaque lemme toutes les proportions, » toutes les équations, *une à une* également, de les mettre en relief, » ainsi que chaque relation de position dont chaque figure présente » plus ou moins de variétés à chaque transformation ; sans compter les » réciproques, totales ou partielles, les cas singuliers, *maximums*, » *minimums*, etc., etc. Là nous paraît être tout le secret ; mais il est à » croire que le mot de l'énigme en ayant fait éclipser tout le merveil- » leux, on jugera en définitive, comme Pappus lui-même, que ce détail » ne vaudrait pas les peines dont il serait l'occasion, et que *toute* » *l'importance réelle réside dans les Lemmes*. Quoi qu'il en soit, M. Bre- » ton (de Champ) n'en aura pas moins rendu, en traduisant les Lemmes » de Pappus, un véritable service à la science, et nous l'engageons de » tout notre pouvoir à continuer son travail sur le reste du VIIe livre, » en se tenant toutefois en garde contre des *idées préconçues*.

» Quant à ce qui nous regarde, nous croirons avoir assez fait si nous pouvons contribuer à l'empêcher de faire fausse route. »

On voit combien je suis loin, malgré l'affirmation positive de M. Breton (IIe supplément [*]), d'avoir *déclaré tout net qu'il avait fait fausse route*, ou qu'il s'était *complétement fourvoyé* (ibid.).

4. A la suite de ma *Notice* parut, dans le même journal (*La Science*), une réponse de M. Breton, en trois articles, sous le titre d'*Objections*, etc.

---

[*] *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 89 ; T. P., p. 3 (*voir* ci-dessous, n° 4).

(nos 27, 28, et 29; p. 75, 83, et 91), réponse à laquelle je répliquai, de mon côté, par une *Seconde Notice* qui fut également insérée dans *La Science* (nos 40 et 41, p. 180 et 187). Je terminais cette seconde Notice par les réflexions suivantes.

« M. Breton, disais-je (p. 188, col. 2; T. P., p. 15), m'accuse de » m'être *laissé dominer par une idée préconçue.* Il est bien vrai qu'une » idée s'était emparée de moi à la première lecture du Mémoire de cet » estimable Géomètre, et qu'ainsi elle s'est trouvée réellement pré- » conçue; mais heureusement elle ne m'a pas dominé. Faut-il le » répéter? j'avais préconçu l'idée que M. Breton venait de dire le der- » nier mot sur la théorie des porismes. Cependant, une étude plus » approfondie m'a fait voir que M. Breton s'était écarté notablement » du sens des textes non moins que de la lettre, et n'avait ainsi donné » qu'une première approximation. J'ai fourni la seconde *d'après lui;* » je ne réclame point d'autre mérite. Il restera donc à M. Breton le » mérite principal, s'il ne le répudie pas lui-même par une persistance » dont les suites seraient très-fâcheuses, en l'empêchant de compléter » son travail comme je l'ai engagé et comme je l'engage plus que » jamais à le faire. C'est à quoi il parviendra en développant les Lemmes » de Pappus, isolant les faits qui se rencontrent dans leurs diverses » démonstrations, mettant en relief les positions des lignes, leurs » rapports exprimés, examinant les cas particuliers, les récipro- » ques, etc., etc. C'est ainsi qu'il verra disparaître, j'en suis certain, » *les doutes, les objections, les impossibilités.*

» Au surplus, je n'ai pas moi-même la ridicule prétention d'avoir » donné des traductions irréprochables sous tous les rapports. Celle » que j'ai proposée peut bien être, *est* même certainement attaquable » sur plusieurs points, notamment dans les énoncés des Porismes, où » l'on est obligé de marcher à tâtons. Nul doute qu'une restauration » complète de l'ouvrage d'Euclide nécessiterait des modifications de » détail dans la rédaction conjecturale que j'ai proposée; mais *je* » *maintiens l'ensemble;* et pour les hommes compétents qui m'auront » fait l'honneur d'examiner, de peser les développements dans lesquels » je suis entré, j'ose espérer que la théorie des porismes cessera d'être » un *arcane* et la géométrie ancienne une *science occulte.* »

Sur ces entrefaites M. Houzel publia, dans le *Journal de Mathéma-*

tiques (2e série, t. I, p. 193), un Mémoire sur le même sujet; et M. Breton y répondit, dans le même journal (2e série, t. II, p. 185), par des *Observations* sous le titre de *Premier supplément aux Recherches nouvelles*, etc.

Enfin, dans un *Deuxième supplément* (voir ci-dessus, n° 3) postérieurement inséré dans ce même journal (2e série, t. III, p. 89), M. Breton m'adresse une réponse personnelle dont j'ai particulièrement à m'occuper aujourd'hui.

5. Avant de commencer, je dois faire observer au lecteur, qu'il résulte évidemment des passages de mes deux Notices, cités ci-dessus, que je me suis offert à M. Breton comme *auxiliaire* bénévole, non comme adversaire; c'est donc tout à fait à tort que le savant Géomètre semble affecter de me considérer sous le second point de vue.

Je motiverai une seconde observation du même genre sur le passage suivant du *Deuxième supplément*.... de M. Breton (p. 91; T. P., p. 3):

« Je donne ci-dessous, dit-il, l'une à côté de l'autre, la traduction » de M. Vincent et la mienne, en faisant toutefois profiter celle-ci » des modifications que j'ai proposées..., et en y apportant diverses » améliorations de détail, dont quelques-unes ont pour objet de » faire droit à celles de mon savant adversaire dont j'ai reconnu la jus- » tesse, etc. »

Suivent en conséquence, sur deux colonnes en regard, comme on l'a vu (*ibid.*), les deux traductions mentionnées, savoir, d'une part celle de M. Breton, amendée depuis mes premières observations et en partie avec leur secours, comme il vient d'être dit, et d'autre part ma propre traduction sous sa forme primitive et *non amendée;* de telle sorte que, dans cette espece de compte courant par *doit* et *avoir*, mon apport se trouve figurer dans l'avoir de mon adversaire (puisque adversaire il y a) au lieu de figurer dans le mien.

Il est évident que M. Breton n'avait point réfléchi à cette légère irrégularité lorsqu'il crut devoir présenter au public savant notre bilan commun sous la forme qu'il a adoptée, et surtout communiquer aux lecteurs du *Journal de Mathématiques*, la réfutation (suivant lui) d'un écrit dont ces mêmes lecteurs n'avaient point été admis à prendre connaissance. Mais ce n'est pas tout : devais-je prévoir qu'en signalant

moi-même, dans ma *Seconde Notice*, certaines améliorations dont mon premier essai de traduction était susceptible, je n'obtiendrais d'autre avantage que de fournir à M. Breton (voir son *Second supplément*, Note *j'*) un motif pour m'accuser de contradiction, en donnant à entendre que ma seconde Notice n'avait d'autre but que de justifier la première dans tous les points, et que j'avais fait tout le contraire sans m'en apercevoir?

A ce compte, on pourra bien trouver de nouveaux sujets de critique dans le présent écrit. Je suis loin certes de me croire la science innée, et de regarder mon amour-propre comme engagé à défendre toutes les conjectures que j'ai pu proposer dans une discussion où, comme je l'ai dit, je me trouvais en quelque sorte jeté au dépourvu. Au contraire, excité par le désir d'apporter quelque lumière réelle dans une question obscure, j'ai fait, dans les nouvelles *Considérations* que je présente aujourd'hui aux lecteurs, tout ce qui était en mon pouvoir pour tâcher de mettre en défaut, non-seulement mon adversaire, mais moi-même; et, persuadé que si cette question des porismes paraissait si difficile à résoudre, c'était surtout et peut-être uniquement parce qu'avant de la traiter on n'avait pas suffisamment étudié le vocabulaire de la géométrie ancienne, c'est à ce dernier point que je me suis particulièrement attaché ici; et je crois être parvenu, même aux dépens de certains détails secondaires de ma première traduction et de mes interprétations, à rendre aussi mes conclusions *plus nettes*.

C'est donc, je dois me hâter de le dire, parce que M. Breton me paraît avoir détourné de leur véritable sens, général ou spécial, plusieurs expressions grecques très-importantes ou plutôt capitales dans la question controversée, qu'il est arrivé à des conclusions si différentes des miennes.

6. La première expression dont j'ai à rectifier le sens, est εὑρεῖν, qui se traduit en latin tantôt par *invenire* (*inventer*), tantôt par *reperire* (*trouver par hasard*); c'est avec le second sens qu'on le lit dans Lucien (II, 282) : Χρυσοῦν δακτύλιον ὁδῷ βαδίζων εὗρε : *tout en cheminant il trouva sous ses pas une bague d'or*) (voir le *Trésor* grec d'Henri Estienne).

Le sens du mot εὕρημα vient à l'appui de ce que je viens de dire (Xén., *Cyr.* VII, 3, 6) : Εἰ δὲ μισθὸν προσλήψοιντο, εὕρημα ἐδόκει εἶναι : *s'il leur arrivait de toucher une solde, ils la regardaient comme une trouvaille.*

Nous sommes ici très-loin, comme on le voit, de l'εὕρηκα d'Archimède.

Quand Pappus emploie l'expression δύναμις εὑρετική, *la puissance inventive* [*], ce n'est point des porismes en particulier qu'il parle, mais des matières du VIIe Livre de ses *Collections mathématiques*, c'est-à-dire de tout ce qui est compris dans le Τόπος ἀναλυόμενος.

Tel est donc, selon moi, le sens dans lequel il faut prendre le mot εὕρεσις dans toute cette théorie des porismes. Ὁρᾶν καὶ εὑρεῖν, c'est tout simplement *ouvrir les yeux et ramasser.* Cela n'exclut pourtant pas (que M. Breton se rassure) toute sagacité et toute finesse de vue : ce serait peu d'ouvrir les yeux si l'on était dépourvu de toute clairvoyance. Ainsi donc, malgré l'insistance que M. Breton met à dire et à répéter que, suivant Pappus, *le porisme exige de l'invention,* la fin de non-recevoir que l'on peut, sur ce point, opposer au système de mon savant adversaire, suffirait pour frapper d'impuissance tout ce système ; mais on va voir que ce n'est pas la seule.

7. En effet, l'illusion que nous venons de signaler chez M. Breton, en a produit plusieurs autres semblables : d'abord relativement au mot πορίζειν, qu'il se croit autorisé à traduire, en conséquence de ce qui précède, par *inventer.* En réalité, les dictionnaires usuels ne peuvent conduire à aucune lumière certaine sur le sens scientifique de ce mot, non plus que sur celui de πορισμός, de πόρισμα, et des divers dérivés mathématiques de πόρος, puisque les Savants, qui seuls pourraient fournir les éléments propres à remplir cette lacune, discutent encore sur la valeur de cette famille de mots. Ainsi, dans l'état actuel des choses, si l'on n'admettait pas le sens naturel fourni par les lexiques, on n'aboutirait jamais à autre chose, si ce n'est à conclure, en langage plus ou moins français, que πορίζειν c'est *faire un porisme* ou *des*

[*] Préface du VIIe livre.

porismes, que πορισμός indique l'action de *poriser*, et πόρισμα le résultat de cette action. Commençons donc par rechercher le sens primitif des mots; c'est le procédé qui se présente le premier, c'est même le seul rationnel : nous verrons ensuite si le sens naturel ne peut nous apporter aucune lumière. Or on trouve parmi les racines grecques

πείρω *transpercer* se traduit;
πόρος *trajet*, *voie*, ou *conduit*; (d'où le mot français *pore*).

De là πόροι, *voies et moyens*; πορίζειν, *pénétrer*, *traverser*, *acquérir*, *fournir* [*]; πορίζεσθαι, *se procurer*; πόριμος, *pénétrable*, que l'on a déjà *pénétré* ou *acquis*; ποριστός, facile à *acquérir*; πορισμός, *acquisition*, *action d'acquérir*, *de tirer parti d'une chose*; πόρισμα, *objet d'une acquisition*, *ressource*, et en latin *corollarium*, d'où le français *corollaire* [**]. De sorte que le titre de *Porismes*, donné à un livre de géométrie, présente assez bien l'idée de ce que nous appellerions des *Compléments de géométrie*, sans toutefois rien préciser sur la nature spéciale des théories supplémentaires à développer.

En attendant que nous discutions les textes de Pappus et de Proclus, citons, en passant, la définition de *Philoponus* (in Aristot. Analyt., I, 8) : πόρισμά τι κατὰ τοὺς γεωμέτρας ἐκ τῶν προειρημένων συνάγει : *Le porisme, suivant les géomètres, déduit quelque conséquence des choses qui ont précédé.*

Eh bien! il se trouve que toutes ces locutions, qui appartiennent à la langue vulgaire, conviennent on ne peut mieux à la matière, et expliquent parfaitement les passages de Pappus et de Proclus dont nous allons reprendre la traduction. Rien donc n'autorise à chercher, pour composer, pour inventer une théorie des porismes, autre chose que ce qu'indiquent ces documents authentiques, considérés dans toute leur simplicité.

---

[*] Τοῖς ἄλλοις πολίταις, ὧν δέονται, πορίζειν (Xén.) : *fournir au public ce dont il a besoin.* — Dans Euclide, πορίζεσθαι est ordinairement employé dans le sens d'*obtenir* par déduction.

[**] *Corollaire*, du latin *corollarium*, qui signifie *couronnement*, *supplément*, ce qu'on ajoute à ce qui est dû, le *comble*, le *par-dessus*. — (Cp. VARRON, *De lingua latina*.

8. Continuons cet examen. M. Breton traduit les expressions δεδομένον σημεῖον, δεδομένη εὐθεῖα, par celles-ci : *point fixe, droite fixe,* au lieu de *point donné, droite donnée.* Énoncer simplement ce fait, c'est dénoncer une erreur évidente. Il est bien vrai, cependant, que d'après la définition d'Euclide (Eucl. *Dat.* def., 4), un point donné, une droite donnée, sont essentiellement *fixes* [*]; mais la substitution de ce dernier mot au mot *donnés* a pour conséquence presque inévitable un grave abus que l'on trouve presque partout chez M. Breton, celui de faire considérer, en quelque sorte de plein droit, comme essentiellement variables, tout point, toute droite, qui ne sont point annoncés comme *donnés.* Comment admettre que la distinction de ce qui est ou n'est pas donné puisse autoriser de pareilles conséquences, au moins d'une manière générale? Que dans chaque cas où M. Breton croit qu'une telle conclusion résulte de l'hypothèse particulière, il cherche à le démontrer, c'est son droit; mais l'accorder d'une manière absolue, cela nous est impossible.

9. J'en dirai autant pour l'expression ἅπτεσθαι θέσει δεδομένης εὐθείας que M. Breton traduit constamment par *décrire une droite,* au lieu de reconnaître que cela signifie simplement *se trouver sur une droite.* Que peut-on voir de décrit, par exemple, dans la définition de *l'angle plan* (Eucl. *Elem.* I def. 8), où les côtés de cet angle sont nommés δύο γραμμαὶ ἁπτόμεναι ἀλλήλων? Croit-on par hasard qu'Euclide aurait voulu établir une opposition entre cette définition et celle du plan qui précède immédiatement, lequel *gît,* κεῖται, *entre ces droites?* Mais non ; depuis Héron d'Alexandrie (*Traité de la Dioptre,*

---

[*] (Eucl., *Dat.* def. IV) : *Des points, des droites, des angles, sont dits donnés de position, lorsqu'ils occupent toujours le même lieu.*

Au reste, ce mot de *donné*, habituellement employé par Euclide, est loin de s'appliquer exclusivement à une *quantité*, à une *ligne*, données *à priori;* il signifie plus ordinairement encore que la quantité ou la ligne se trouve déjà connue ou *déterminée* par une opération ou par un raisonnement précédent. C'est ce qui résulte des définitions mêmes d'Euclide, de Pappus, de Proclus et de Marinus : Δεδομένα τῷ μεγέθει λέγεται...οἷς δυνάμεθα ἴσα πορίσασθαι (Eucl., *Dat.* def. 1), et ce qui, d'ailleurs, comprend quatre cas, savoir : donnés de *position*, de *rapport*, de *grandeur*, et de *forme* ou d'*espèce* (*Procl. in Euclid.*, p. 57 ; *Barocc.*, p. 117).

dans les *Notices et Extraits des manuscrits*, t. XIX, 2e part., p. 312, T. P., p. 156) jusqu'à Proclus, les géomètres grecs, pour indiquer la description d'une ligne, se servent constamment des expressions γράφειν ou γεννᾷν (Cp. Procl., in Eucl., p. 29, Barocc., p. 61), et non du mot απτεσθαι.

D'ailleurs, il y a une preuve sans réplique que les mots ἅπτεσθαι δεδομένης γραμμῆς n'ont nullement le sens que M. Breton leur attribue, et qu'ils ne font, le cas échéant, que constater l'existence du *lieu* en vertu d'une démonstration analytique : cette preuve consiste en ce que l'*analyse* du problème, quand il s'agit d'une description effective, est toujours suivie d'une *synthèse* dans laquelle le lieu est véritablement décrit; et que, pour lors, cette description est exprimée par le mot γεγράφθω : c'est un fait dont peuvent se convaincre, en recourant au texte même de Pappus (*Lieux à la surface, Coniques*, etc.), ceux à qui resteraient quelques doutes sur ce point.

Ce n'est pas à dire pour cela que l'expression ἅπτεσθαι, appliquée à un point, soit exclusive de tout mouvement, qu'elle exclue toute ligne décrite ou engendrée si la nature de la question comporte, explicitement ou implicitement, la variation du point; mais ce n'est alors qu'un accident. Et fût-il vrai en fait (ce qui n'est pas) que le mot ἅπτεσθαι eût toujours ce sens dans Pappus, on ne serait pas en droit pour cela de remplacer, sans nécessité, le sens propre et primitif du mot, par un sens détourné qui peut conduire, et conduit en effet, à des idées totalement fausses. Il n'est d'ailleurs pas exact de dire que ce soit là avoir *deux langages différents*, puisque l'on ne fait que désigner, par une seule et même expression, une idée commune aux deux faits; et surtout il n'en résulte pas davantage, comme M. Breton me le fait dire (IIe Supplément, p. 120, T. P., 32, 3°) « que ἅπτηται a le même sens que δεδομένα ῇ ». Où puis-je avoir dit qu'un point ne peut être sur une droite donnée de position sans être donné lui-même?... L'observation de M. Breton porte donc entièrement à faux; et je me trouve forcé de dire que « certainement » c'est lui-même qui « se trompe ».

10. Ici se rattache la question du sens que présente l'énoncé du grand théorème interprété par R. Simpson, et d'après lequel les ima-

ginations ont tant travaillé. Eh bien! après de nouvelles recherches, de nouvelles réflexions, et une nouvelle collation des manuscrits, je puis aujourd'hui l'affirmer, et j'en vais donner les preuves *: cette proposition n'appartient pas au livre des Porismes.*

En effet, voyons comment la mention de ce théorème est introduite dans la question des porismes. Après avoir parlé des diverses sortes de *lieux*, dont on a composé et publié des livres particuliers, les porismes proprement dits étant mis à part (*voir* plus loin, § III, Annot. I), Pappus parle des inconvénients que présente l'abréviation habituelle des énoncés, procédé auquel on est cependant presque forcé de recourir à cause de la multitude des propositions, dont il résulte que les géomètres se trouvent sans cesse exposés à prendre le change sur leur véritable sens. Cependant, reprend Pappus, « dans une semblable ma- » tière *il est bien agréable* » (ἥδιστα dans tous les manuscrits : c'est à tort que M. Breton écrit ἥκιστα, *très-difficile*), « il est bien agréable, » dit Pappus, de pouvoir comprendre beaucoup de choses en une seule » proposition, par la même raison qu'Euclide, de son côté, n'a donné » que peu de développement à chaque espèce ». Or il faut remarquer qu'ici se trouve *unanimement un gros point* dans les manuscrits, et que, par conséquent, la phrase est complétement terminée. L'auteur continue, sans qu'il paraisse y avoir de lacune dans ce passage comme on l'a cru, mais seulement une ellipse : Ἀλλὰ δείγματος ἕνεκα κ.τ.λ. Je pense toutefois qu'il y a lieu de lire προσαρκεῖν au lieu de πρὸς ἀρχὴν dont la prononciation est presque la même, et peut-être δεδομένα au lieu de δεδομένον, dont la sigle abréviative terminale aurait été mal lue [*]; je conserve ἐν ᾗ : et quant à la conjonction ἀλλα, elle est explétive. Je traduis, en conséquence, à peu près mot à mot : « Pour exemple d'une grande multitude dans laquelle il est très-suffi- » sant que peu de choses soient données [nous citerons ceci] : il a » placé des propositions semblables du Ier livre, empruntées à cette

---

[*] A moins de supposer qu'il y avait δεδομένον ἔστω ἃ α̅ᵒ βιβλίου τέθεικεν, ce qui est très-possible, ἔστω pouvant avoir été représenté, comme il arrive souvent, par un signe de convention que le copiste n'aura pas compris, et le pronom ἃ ayant été absorbé par la sigle αᵒ (πρώτου).

» espèce si féconde des Lieux, de sorte que leur nombre s'élève à 10.
» C'est pourquoi, ayant trouvé admissible de les comprendre dans une
» même proposition, nous avons résumé le tout comme il suit ».

Malgré la tournure elliptique de la phrase, il est bien clair que Pappus parle ici de l'espèce des Lieux, dont on avait composé des livres spéciaux : c'est donc évidemment du Ier livre des *Lieux plans* qu'il est question, d'autant plus que les mots *παρ' ἐκείνου τοῦ δαψιλεστέρου εἴδους τῶν τόπων* ne sont que la répétition des précédents *εἶδος ἐστὶν οἱ τόποι καὶ πλεονάζουσιν*.

En résumé, l'auteur avait besoin d'un exemple; il le prend où il le trouve. Il n'est ici nullement question des Porismes, dont le Ier livre, pas plus que les autres, ne contient rien que l'on puisse rattacher au théorème en question avec quelque apparence de bonne raison; et, ce qui permet de regarder comme très-probable que c'est du Ier livre des *Lieux plans* (et, par conséquent, des Lieux en général) qu'il s'agit dans ce passage, c'est que Pappus, arrivé aux lemmes des *Lieux plans* (voir *Command.*, p. 346), commence immédiatement par le second livre, en passant entièrement le premier sous silence. On peut donc croire que les 10 propositions résumées par Pappus dans son théorème, se rapportaient précisément au Ier livre des *Lieux plans*. Or, on voit sur-le-champ que ce résultat, une fois constaté, suffit pour faire prendre à la question une face toute nouvelle : car dès lors il n'existe plus aucune raison pour chercher à voir, dans les livres d'Euclide spécialement consacrés aux Porismes, des propositions du même genre que le théorème de Pappus.

Par suite, je n'ai donc plus, de mon côté, aucune raison de soutenir l'explication que j'avais donnée de cette proposition en la prenant, après tout le monde, pour un exemple de porisme. Je me réserve cependant de faire voir, quand j'arriverai au commentaire de ce passage, que mon interprétation, dans l'hypothèse du porisme, n'était pas aussi dépourvue de sens géométrique que l'on a bien voulu le dire.

11. Reste une dernière observation générale relative au reproche que m'adresse M. Breton, d'assimiler les porismes aux corollaires (Note *z''*). Or, il doit m'être permis de demander à mon savant adversaire pourquoi les Grecs n'auraient pas donné des dénominations diffé-

rentes à des propositions qui, suivant lui, sont de natures si diverses? La langue grecque était-elle donc devenue si pauvre dans la bouche des géomètres? M. Breton connaît aussi bien que moi l'origine latine du mot *corollaire* (ci-dessus, n° 7, p. 17) : qu'il nous dise donc comment les Grecs nommaient le corollaire! Ne voit-on pas tout ce qu'il y a d'exorbitant à partager ainsi les propositions *uniformément nommées porismes, πορίσματα*, en deux catégories pleinement arbitraires, pour dépouiller l'une, non moins arbitrairement, du titre que lui donnaient les Grecs? N'est-ce pas comme si l'on disait : « Voici mon opinion sur » les porismes; tous les porismes qui y satisfont conserveront leur » titre; mais pour les autres, je les en destitue et veux qu'ils soient » dorénavant réduits à s'appeler corollaires »? Quelle théorie sérieuse, je le demande, pourrait-on établir sur de semblables procédés?

12. Enfin, toutes ces questions préliminaires étant vidées, il ne me reste plus qu'à donner une nouvelle traduction des passages de Pappus et de Proclus, refaite conformément aux observations que je viens d'exposer, et à la justifier dans un commentaire. Je ne mettrai point en regard de ma propre traduction, celle de M. Breton, surtout sa première rédaction : ce serait pour moi un avantage tout personnel que je ne rechercherai point. Mon seul but est de convaincre le lecteur que le vrai sens des textes de Pappus et de Proclus ne comporte *rien des idées de mouvement, de profonde invention*, etc., que l'on avait cru y apercevoir. Je ne m'appesantirai point sur les détails; je reconnais que M. Breton a raison dans plusieurs circonstances; et des *cinquante contresens* dont il se plaît (IIe Suppl., p. 2) à composer l'enjeu de la partie qu'il soutient contre moi, je consens volontiers à en prendre la majeure partie pour mon compte. Aussi remarquera-t-il que, pour éviter des discussions tout à fait secondaires, et je dirai même oiseuses, j'ai *laissé passer* sa traduction dans le plus grand nombre des cas. Mais je réclame la permission de me défendre sur les autres points, dussé-je m'y faire accuser d'un supplément de contresens. Le public compétent jugera en dernier ressort; et il trouvera, je l'espère, que si je ne suis point parvenu à lui faire comprendre ce qu'étaient les porismes, j'ai du moins montré clairement ce qu'ils ne pouvaient être.

§ II.

Traduction des textes de Pappus et de Proclus.

« Après les *Contacts*, dit Pappus (livre VII), il y a les *Porismes* d'Euclide en trois livres, recueil très-riche, et disposé avec beaucoup d'art pour la résolution des problèmes les plus difficiles considérés dans toutes les variétés (A), en nombre illimité, que présente leur nature. On n'a toutefois rien ajouté à ce qu'Euclide à écrit [sur ce sujet], si ce n'est que certains [géomètres] venus avant nous, ont, mal à propos, mêlé quelques doubles rédactions (B) parmi les siennes, chaque chose étant à la vérité susceptible d'un certain nombre de démonstrations, comme nous le faisons voir, mais Euclide ne donnant pour chacune d'elles qu'une seule explication qui en est l'expression la plus claire. La théorie en est fine et naturelle, et nécessaire à ceux qui savent voir et déduire des conséquences (πορίζειν). Leurs diverses espèces ne sont, quant à la forme, ni des théorèmes ni des problèmes, mais tiennent en quelque sorte le milieu entre les deux ; de telle façon qu'il est facultatif d'en mettre les énoncés sous la forme qui convient aux théorèmes aussi bien que sous celle qui convient aux problèmes (C) ; d'où il est résulté que, parmi beaucoup de géomètres, les uns estiment qu'elles appartiennent au genre des théorèmes, tandis que d'autres, ne tenant compte que de la manière de formuler les énoncés, les considèrent comme appartenant au genre des problèmes.

» Mais les différences entre ces trois choses ont été mieux connues des Anciens, ainsi qu'on le voit par leurs définitions : car ils disaient que le *théorème* est une chose proposée en vue de la *démonstration* de ce qui est proposé, que le *problème* est une chose proposée en vue de la *construction* de ce qui est proposé, et qu'enfin le *porisme* est une chose proposée en vue du *parti à tirer* (πορισμός, ci-dessus, n° 7) de ce qui est proposé (D). Cette définition du porisme a été changée par les Modernes, lesquels ne pouvant pas tout pénétrer (ἅπαντα πορίζειν) [pour aller au delà], mais se prévalant de ce qu'ils voyaient dans ces éléments [des porismes] et se bornant à y montrer la chose seule qui est demandée (ὅ ἐστι τὸ ζητούμενον) (E), mais sans aller plus loin (μὴ πορίζόντων δε τοῦτο), convaincus (F) par la définition [précitée] et par ce qui est en-

seigné, ont en conséquence écrit ceci, en s'arrêtant à une circonstance accessoire (G) : « Le porisme est ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse d'un » théorème local (H) ».

» Dans ce genre des porismes (I), les *Lieux* sont compris comme espèce; et ils abondent dans le livre nommé *Analyomène* ou *Répertoire d'analyse* (J). Ceux des porismes [qui ne sont pas des lieux] étant mis à part, on a réuni les autres sous des titres particuliers, et on les a donnés séparément, cette espèce étant beaucoup plus nombreuse que les autres. En effet, parmi les *Lieux* les uns sont *plans*, d'autres *solides*, d'autres *linéaires*, et il y a en outre ceux *aux moyennes*.

» Il arrive encore aux porismes ceci, de présenter des énoncés très-peu explicites où plusieurs choses sont ordinairement sous-entendues, ce qui est une cause d'incertitude (K); de sorte que beaucoup de géomètres ne saisissent qu'en partie ce dont il s'agit, et ce qu'il y a de plus essentiel leur échappe. Toutefois, dans une pareille matière [qui est si riche], il est bien agréable (ci-dessus, nº **10**) de pouvoir comprendre un grand nombre de propositions dans un seul énoncé; et c'est par la même raison qu'Euclide n'a pas donné beaucoup de choses de chaque espèce. Pour exemple d'un cas où peu de paroles suffisent à exprimer un grand nombre de choses, [citons], au Ier livre [des *Lieux*], plusieurs propositions analogues entre elles appartenant à cette espèce si féconde, et dont le nombre s'élève à 10. C'est pourquoi, trouvant admissible de les comprendre dans un seul énoncé, nous avons résumé le tout comme il suit.

« Dans un système de quatre droites (L) telles, que deux d'entre » elles formant un angle, les deux autres se coupent dans l'intérieur » de cet angle ou à l'extérieur, ou bien soient parallèles, si trois de » leurs points d'intersection sont donnés sur l'une d'elles, ou deux » seulement sur l'une des droites parallèles dans ce dernier cas, et » que les points restants, un seul excepté, soient situés chacun sur » une droite donnée, ce dernier point sera également situé sur une » droite donnée. »

« Il ne s'agit ici que de quatre droites, telles que pas plus de deux ne se coupent en un seul point; mais ce que l'on ne sait pas, c'est que la même chose est vraie pour un nombre quelconque de droites, de cette manière : « Tant de droites qu'on voudra se coupant les unes » les autres, mais pas plus de deux en un même point, si tous les

» points où l'une d'elles est rencontrée par les autres, sont donnés, et » que chacun des points où l'une de ces dernières est coupée par l'une » des droites restantes, se trouve en même temps sur une droite don- » née.....; ou plus généralement : Tant de droites qu'on voudra se » coupant les unes les autres, mais pas plus de deux en un même » point, si tous les points où l'une d'elles est rencontrée par les autres, » sont donnés, et que parmi les points d'intersection de ces dernières, » lesquelles forment un nombre triangulaire, il s'en trouve autant si- » tués chacun sur une droite donnée, qu'il y a d'unités dans le côté » de ce nombre, de telle sorte que trois d'entre elles ne puissent abou- » tir aux angles d'un espace triangulaire [c'est-à-dire former un » triangle], chacun des points d'intersection restants sera pareillement » situé sur une droite donnée. »

» Il est vraisemblable que l'auteur des *Éléments* n'ignorait pas cette extension; mais il n'a prétendu que fixer un point du débat. Et il paraît avoir répandu dans tous ses porismes les principes et les germes seulement de nombreuses et grandes foules [de propositions]. Il faut distinguer chacune [de ces foules] non pas par les différences des hypothèses, mais par celles des choses qui arrivent ou qui sont cherchées (M). Or les hypothèses diffèrent toutes les unes des autres par des aspects très-divers; mais chacune des choses qui arrivent ou qui sont cherchées se présente unique et la même pour plusieurs hypothèses différentes.

» Voici en conséquence, pour le Ier livre, le genre des choses cherchées dans les propositions (*voyez* la figure au commencement de ce livre, (N). « Si de deux points donnés on mène deux droites se cou- » pant sur une droite donnée de position, et que l'une d'elles retranche » d'une droite donnée de position un segment à partir d'un point » donné sur cette dernière, la seconde retranchera aussi sur une » autre (O) [droite donnée de position, à partir d'un point donné sur » cette droite], un segment qui sera au premier dans un rapport » donné. »

» Et ensuite [*] :

[*] Le lecteur doit comprendre qu'il nous est impossible de garantir l'exactitude parfaite d'une grande partie des énoncés qui suivent.

» 1°. Que tel point est situé sur une droite donnée de position (P).

» 2°. Que le rapport de telle droite à telle autre est donné.

» 3°. Que telle droite est partagée dans un rapport d'apotome (Q).

» 4°. Que telle droite est donnée de position (R).

» 5°. Que telle droite passe par un point donné.

» 6°. Qu'il y a un certain rapport entre telle droite et un segment compris entre tel » point et un point donné.

» 7°. Qu'il y a un certain rapport entre telle droite et un certain segment abaissé de » tel point.

» 8°. Qu'il y a un certain rapport entre tel espace et le rectangle qui a pour côtés » une droite donnée et telle autre droite (S).

» 9°. Que tel espace est [décomposable en deux parties dont] l'une est donnée et » dont l'autre est [à la première] dans un rapport d'apotome.

» 10°. Que tel espace pris seul ou avec un certain espace [est décomposable en deux » parties dont l'une est donnée et dont] l'autre est [à un espace donné] dans un rapport » d'apotome.

» 11°. Que telle droite, plus une autre droite avec laquelle telle autre droite est » dans un rapport donné, est elle-même dans un certain rapport avec un certain » segment compris entre tel point et un point donné.

» 12°. Que le triangle qui a pour sommet un point donné et pour base telle droite, » est équivalent au triangle qui a pour sommet un point donné et pour base le segment » compris entre tel point et un point donné.

» 13°. Qu'il y a un certain rapport entre la somme de telle droite ajoutée à telle autre » droite, et un certain segment compris entre tel point et un point donné.

» 14°. Que telle droite détermine, sur des droites données de position, des segments » qui comprennent un espace donné. »

» Dans le IIe livre, ce sont d'autres hypothèses. Quant aux choses cherchées, la plupart sont les mêmes que dans le premier livre; mais il y a de plus les suivantes :

» 1°. Que tel espace, ou la somme de cet espace et d'un espace donné, est [partagé] » suivant un rapport d'apotome.

» 2°. Que le rectangle qui a pour côtés telle droite et telle autre droite est [partagé] » suivant un rapport d'apotome.

» 3°. Que le rectangle qui a pour côtés la somme de deux droites et la somme de deux » autres droites est [partagé] suivant un rapport d'apotome.

» 4°. Que deux rectangles, dont le premier est construit sur telle droite et telle autre » droite augmentée d'une troisième droite qui est avec une quatrième dans un rapport » donné, et dont le second est construit sur telle droite et telle autre droite qui est dans » un rapport donné avec la précédente, forment une somme qui est partagée suivant » un rapport d'apotome.

» 5°. Qu'il y a un certain rapport entre la somme de deux droites [désignées] et » une certaine droite comprise entre tel point et un point donné.

» 6°. Que le rectangle de telle droite et de telle autre droite est donné.

» Dans le IIIe livre, le plus grand nombre des hypothèses sont relatives au demi-cercle; quelques-unes regardent le cercle et les segments. Pour les choses cherchées, la plupart ressemblent aux précédentes; mais il y a celles-ci en plus:

» 1°. Qu'il y a un certain rapport entre le rectangle construit sur telle et telle droite » et le rectangle construit sur telles autres droites.

» 2°. Que le carré construit sur telle droite est [partagé] suivant un rapport » d'apotome.

» 3°. Que le rectangle de telle droite avec une autre droite [est égal] au rectangle » qui a pour côtés une droite donnée et le segment compris entre tel point et un point » donné.

» 4°. Que le carré construit sur telle droite [est égal] au rectangle qui a pour côtés » une droite donnée et le segment déterminé, à partir d'un point donné, par une » [certaine] perpendiculaire.

» 5°. Que le rectangle construit sur la somme de deux droites d'une part, et d'autre » part telle droite qui a un rapport donné avec telle autre droite, est lui-même [partagé] suivant un rapport d'apotome.

» 6°. Qu'il existe un point donné tel que les droites menées de ce point à deux » points donnés comprennent un angle donné d'espèce (T).

» 7°. Qu'il existe un point donné tel, que les droites menées de ce point à deux » points donnés interceptent des arcs égaux.

» 8°. Que telle droite est parallèle à une certaine droite passant par un point donné, » ou fait avec elle un angle donné (U). »

Tel est le passage que Pappus consacre à l'explication des Porismes d'Euclide, dans la préface du septième livre de ses *Collections mathématiques*, livre consacré spécialement au recueil nommé en grec soit *Τόπος ἀναλυόμενος*, soit simplement *Ἀναλυόμενος* [*], et en latin, suivant Commandin, *Locus resolutus*, ce que je crois pouvoir traduire en français par les mots *Lieux* (*communs*) *de l'analyse*, et non *Lieu résolu*, considérant le mot *ἀναλυόμενος* comme appartenant à la voix moyenne et non au passif.

Voici maintenant les passages extraits de Proclus.

[*] *Voir* ci-après l'annotation J.

Le premier ne contient que ces quelques mots [*] :

« *Porisme* se dit de certains problèmes tels que *les Porismes d'Euclide;* mais il se dit plus particulièrement lorsque, des choses que nous avons démontrées, il en surgit quelque autre qui est un théorème que nous n'avions pas énoncé et que pour cela on a appelé *porisme*, lequel est comme un gain accessoire qui vient s'ajouter à la démonstration scientifique (*ὥσπερ τι κέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως πάρεργον*). »

Voici maintenant le second passage, beaucoup plus long et plus important.

Il vient à propos de la proposition quinzième du premier livre des Éléments d'Euclide, établissant que : *Quand deux droites se coupent mutuellement, les angles opposés au sommet* [formés par leur intersection] *sont égaux entre eux.*

Euclide ajoute à ce théorème un porisme ou corollaire que Peyrard, dans son édition grecque-latine-française des Éléments d'Euclide, en trois volumes in-4°, a supprimé, et cela avec bien peu de raison, il faut le dire. Ce porisme consiste en ce que : *La somme des quatre angles* [formés dans la circonstance susdite] *est égale à quatre angles droits* [**].

« Le mot *porisme,* reprend Proclus en cet endroit [***], est un des » termes qu'emploie la géométrie; il a une double signification. On » nomme *porismes,* d'abord, des théorèmes qui se trouvent implicite- » ment préparés par la démonstration de quelques autres, et qui sont, » pour ainsi dire, des gains éventuels et des bénéfices dont on profite » en passant; en second lieu, des notions comprises implicitement dans » l'objet d'une question, mais où il y a cependant quelque chose de » particulier à trouver : de sorte qu'il ne s'agit, dans ce cas, ni d'une » construction proprement dite, ni d'une simple théorie (V).

» Par exemple, que *Dans les triangles isoscèles, les angles à la base*

---

[*] Procl. in Eucl., p. 58 et 59; Barocc., p. 121.

[**] Un peu plus loin, Proclus, dans son Commentaire, étend ce porisme à *un nombre quelconque de droites* issues d'un même point.

[***] *Ibid*, p. 80; Barocc., p. 173.

» *soient égaux*, c'est là simplement une affaire de théorie, et dont il » ne s'agit que d'aquérir la connaissance, comme de toutes les choses » qui *sont*. D'un autre côté, la bissection d'un angle, la construction » d'un triangle, une addition ou une soustraction, tout cela n'exige » qu'une opération dont le but est déterminé. Mais au contraire, « Un » cercle étant donné, en trouver le centre [*] » ; ou bien : « Deux » grandeurs commensurables étant données, en trouver la plus grande » commune mesure [**] » : toutes les questions de ce genre tien- » nent, en quelque sorte, le milieu entre les problèmes et les théo- » rèmes [c'est-à-dire ne sont précisément ni l'une ni l'autre de ces » deux choses (W)]. En effet, ce ne sont pas ici des créations (X), » quoiqu'il y ait quelque chose à trouver; et ce ne sont pas non plus » des théorèmes abstraits, puisqu'il faut offrir à la vue, représenter » devant les yeux, l'objet de la question (Y). Or, tel est le genre des » propositions nommées *Porismes*, et traitées par Euclide dans les » livres de *Problèmes* qu'il a composés; mais il n'y a pas lieu de parler » ici de cette espèce de *porismes* (Z). Quant aux *porismes* contenus » dans les Éléments, ils se trouvent implicitement compris dans la » démonstration de quelques autres théorèmes et résultent de quel- » que recherche précédente. Telle est, par exemple, la proposi- » tion dont il s'agit. Il fallait établir que : *Quand deux droites se* » *coupent mutuellement, les angles* [*opposés*] *par le sommet sont égaux*. » Or, en même temps qu'on démontre cette vérité, on fait voir égale- » ment que les quatre angles sont égaux à quatre droits. Car lorsque » nous avons dit : « Soient les deux droites AB, CD, qui se coupent » au point E : puisque la droite AE rencontre CD, elle fait deux angles » adjacents égaux à deux droits » : en parlant ainsi, dis-je, nous » avons implicitement démontré (avec la proposition principale) que » les angles formés autour du point E sont égaux à quatre droits.

» Le *porisme* est donc un théorème mis en évidence, sans intention » directe, dans l'exposition d'un autre problème ou théorème, et sur » lequel on tombe comme par hasard : car on ne l'avait point en vue

---

[*] Eucl., *Élém.* III, 1.

[**] *Ibid.*, X, 3.

» et on ne le cherchait point lorsqu'il s'est rencontré. Voilà pourquoi » nous avons assimilé les porismes à des profits éventuels : et telle est » sans doute l'origine du nom que leur ont donné les grands Mathé- » maticiens, voulant par là montrer au vulgaire toujours attiré par » l'appât du gain, que les Vérités sont des présents de Dieu et de véri- » tables épaves, mais non dans le sens où l'entend la foule; en effet, » c'est comme une plante dont le Génie du Gain a créé la racine en » nous-mêmes, et que la puissance génératrice de la Science fait fruc- » tifier, ajoutant ainsi aux produits précédemment acquis, de riches » moissons de théorèmes [*]. Telle est donc l'essence propre que l'on » doit attribuer aux *porismes*.

» Maintenant, il faut les diviser suivant les sciences auxquelles ils ap- » partiennent : car les uns se rapportent à la géométrie, les autres à » l'arithmétique. Ainsi, le *porisme* en question se rapporte à la géo- » métrie, et celui qui se trouve à la fin du second théorème (*lisez* » problème) du septième [livre, qui est le premier] des livres relatifs » aux nombres, celui-là se rapporte à l'arithmétique.

» Ensuite, quant à la nature des propositions antécédentes d'où dé- » pendent les porismes, ce sont, pour les uns des problèmes, et pour » les autres, des théorèmes; le présent porisme appartient à un théo- » rème; et celui qui se trouve annexé à la deuxième [proposition du » septième] livre, se rapporte à un problème [**].

» La troisième distinction concerne le mode de démonstration : car » les uns dépendent d'une démonstration directe, les autres d'une » réduction à l'absurde. Or, celui qui nous occupe dépend d'une » démonstration directe, et celui de la première proposition du troi- » sième livre est fondé sur la réduction à l'absurde [***].

---

[*] Il est bon de noter en passant les jeux de mots contenus dans cette phrase : ὁ ἐν ἡμῖν Πόρος ἀπογεννᾷ..... εὐπορίας ἀφθόνους θεωρημάτων.

[**] La proposition consiste à *Trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres non premiers entre eux :* c'est donc un problème; et le porisme consiste en ce que *Tout nombre qui en divise séparément deux autres, divise aussi leur plus grand commun diviseur.*

[**] La proposition est de *Trouver le centre d'un cercle donné;* et le porisme consiste en ce que *La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite passe par le centre.*

» On peut encore, dit Proclus en terminant, diviser les *porismes* de » beaucoup d'autres manières ; mais les précédentes nous suffiront » pour le moment présent. »

§ III.

Annotations et commentaires sur les traductions qui précèdent.

(A) La transformation de γενῶν en γενομένων adoptée par M. Breton ne me paraît nullement justifiée. De plus, γενῶν est incontestablement régi par πλῆθος ἀπερίληπτον que ne précède aucune virgule.

(B) Le sens du mot *formule* est bien moderne pour permettre de supposer qu'il rendra exactement le mot γραφή. Je ne vois que les *proportions* (ἀναλογίαι) dont on puisse, dans les procédés de démonstration des Anciens, comparer la nature à ce que nous appelons *des formules*. Je crois qu'il s'agit ici des doubles et triples démonstrations que l'on trouve dans les divers écrits d'Euclide et des autres géomètres, démonstrations vraisemblablement dues pour l'ordinaire aux commentateurs, et qui s'annoncent par le mot ἄλλως.

Quant au fait signalé plus bas, que dans le deuxième livre des *Porismes*, beaucoup de choses sont les mêmes que dans le premier livre, et que dans le troisième beaucoup sont à peu près semblables, on peut se l'expliquer en songeant, par exemple, à la multitude des démonstrations relatives à la valeur du carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle; les unes sont fondées sur l'arithmétique, d'autres sur les propriétés des triangles ou sur la simple superposition, d'autres sur les propriétés du cercle, etc.

Or, on sait que la construction d'un problème de géométrie un peu compliqué, d'une *épure*, se décompose en un certain nombre de constructions élémentaires, telles, par exemple, que la détermination d'une quatrième, d'une moyenne proportionnelle, etc. (je me borne aux plus simples), et que suivant le cas, c'est-à-dire suivant l'état où l'exécution de la figure est déjà parvenue, suivant la disposition relative des lignes déjà placées, tel mode de construction élémentaire peut être très-préférable à tel autre ; et c'est à fournir une plus grande variété dans le choix de ces moyens de construction que le *Lieu commun des analyses* était particulièrement destiné. Aussi les mêmes résultats, les mêmes porismes se retrouvent-ils en une multitude d'endroits du septième livre de Pappus, considérés comme ne formant qu'un seul tout, et non pas seulement dans la partie qui appartient à Euclide. C'est certainement dans ce sens très-large qu'il faut entendre l'assertion de Pappus : qu'*Un grand nombre d'hypothèses différentes donnent lieu aux mêmes résultats*.

(C) Il est facile de concevoir comment les porismes pouvaient être présentés sous ces deux formes. Ainsi par exemple, si un porisme établit que *telle droite est troisième proportionnelle à deux droites données*, on pourra le présenter sous cette forme même qui

est celle d'un théorème, ou sous celle de problème en disant : *Construire* (par tel procédé, ou en vertu de telle propriété) *une troisième proportionnelle, etc.*

(D) C'est avec raison que M. Breton appelle particulièrement l'attention sur les définitions du *théorème* et du *porisme*. La chose qui frappe surtout en lisant ses Notes *i*, *j*, *k* (IIe Supplément), c'est de voir combien mon honorable contradicteur s'éloigne, dans sa définition du porisme, des principes que lui-même pose dans ces trois Notes. En effet, la définition du théorème et celle du porisme ne différant dans le grec que par un seul mot, il en doit être de même dans le français suivant les principes mêmes de M. Breton. Or, ma définition seule satisfait aux conditions ainsi posées, en remplaçant le mot *démonstration* par un équivalent d'*acquisition* ou *profit*. Quant à la justification de ce dernier mot, observons que, dans le théorème, il s'agit principalement de *démontrer* une vérité qui jusque-là était inconnue, tandis que dans le porisme, il suffit de la *constater* en passant, afin de pouvoir s'en servir au besoin : car pour son évidence, elle est censée résulter de celle de la proposition principale à laquelle le porisme se rattache.

(E) Ὅ ἐστι τὸ ζητούμενον me paraît être une formule terminale et conclusive de la solution des problèmes, analogue à ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, de même que ὅπερ ἔδει δεῖξαι est la formule conclusive des théorèmes. Ainsi, les géomètres qui manquaient de sagacité, arrivés à la conclusion ὅ ἐστι τὸ ζητούμενον, s'arrêtaient là sans chercher plus loin ; mais les habiles, τοῦτο πορίζοντες, examinaient s'il n'y avait pas quelque chose à remarquer et à déduire. (*Voyez* ci-après l'annotation M.)

(F) Ἐλεγχόμενοι, *convaincus ;* il m'est impossible de reconnaître à ce mot une autre signification. Les géomètres modernes dont il s'agit se conformaient à la définition précitée, en faisant ressortir des conséquences qui n'avaient pas besoin de démonstration spéciale. (*Voyez* ci-après l'annotation I.)

(G) Τὸ συμβεβηκός, *l'accident,* par opposition soit à ἀναγκαῖον, le *nécessaire,* soit à ὑποκείμενον, le *sujet*, soit encore à οὐσία, l'*essence*, conformément aux doctrines aristotéliques. (*Voyez* ci-après l'annotation M.)

(H) *Ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse d'un théorème local*, et non pas *ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse* pour que celle-ci devienne l'énoncé *d'un théorème local.*

Quoi qu'en dise ici (Not. *u*) M. Breton, il y a une différence capitale entre ces deux interprétations ; et je repousse formellement celle de mon honorable adversaire, bien qu'il dise, à la phrase suivante (sans doute par l'effet de quelque *lapsus*), que je n'élève aucune objection contre cette interprétation.

D'abord, qu'entendaient les Anciens par *un théorème local ?* c'est ce que Proclus explique à l'occasion de la proposition 36 du premier livre d'Euclide [*], consistant en ce que *Les parallélogrammes construits sur des bases égales et entre les mêmes*

[*] Procl. in Eucl.; p. 103; Barocc., p. 237.

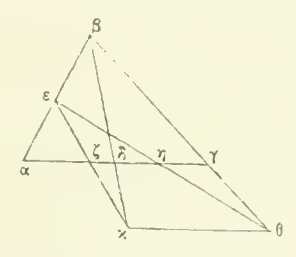
parallèles, sont équivalents en surface. « L'espace compris entre deux parallèles, dit Proclus, est le lieu des parallélogrammes équivalents qui sont construits sur la même « base [*] ». Le même auteur donne un second exemple de lieu géométrique : c'est celui du segment de cercle (non de l'arc, qu'on le remarque bien), segment qui est le *lieu des angles égaux*, comme par exemple le demi-cercle est le lieu des angles droits. Nous aurons occasion de revenir plus loin sur cet exemple (Annot. T et U).

On reconnaîtra sans peine que cette notion antique du *lieu géométrique*, analogue à l'idée que les Modernes attachent à la même expression, en diffère cependant d'une manière essentielle. Or, il me paraît évident que l'idée moderne, substituée à l'idée ancienne, n'a pas peu contribué à obscurcir la véritable et simple notion des porismes, comme tout l'ensemble de cette Notice le fait voir.

Pour en revenir à la discussion rapportée par Pappus, on voit ce que signifient ces expressions : « Ce qui manque à l'hypothèse d'un théorème local... ». Dans le cas du parallélogramme, il manque, soit son sommet, soit l'inclinaison des côtés sur la base, conditions nécessaires pour faire disparaître l'indétermination. Dans le segment capable d'un angle donné, il manque de même, soit le sommet de cet angle, soit la direction d'un côté, etc.

Maintenant, je vais justifier mon mot-à-mot. Je prends pour exemple la proposition que je considère comme étant précisément l'énoncé du premier lemme donné par Pappus dans les termes suivants, savoir :

» Soit la figure $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$, et soit $\alpha\zeta : \zeta\eta :: \alpha\delta : \delta\gamma$. Joignez $\theta\kappa$. Je dis que $\theta\kappa$ est parallèle « à $\alpha\gamma$. »



La démonstration est inutile ici ; mais il est important de compléter l'énoncé. Pappus a l'habitude, très-fâcheuse pour nous, de donner les figures sans explication suffisante, comme parlant à des gens qui les avaient sous les yeux et connaissaient les hypothèses d'après lesquelles elles étaient construites. C'est encore là, pour le dire en passant, une des grandes causes de l'obscurité qui règne dans le style de cet auteur. Je reprends l'explication de la figure et l'énoncé complet du lemme.

---

[*] Ce lieu faisait en même temps partie du nombre des lieux dits *paradoxaux* ou prodigieux : le paradoxe actuel est pour la géométrie, ce que le paradoxe dit *hydrostatique* est pour la mécanique.

« *Soit un triangle quelconque* $\alpha\beta\gamma$: *je mène par le sommet* β *une droite quelconque* $\beta\delta$ » (que je prolonge ainsi que le côté $\beta\gamma$); *le rapport* $\alpha\delta : \delta\gamma$ *se trouve ainsi déterminé. Je* » *prends sur le côté* $\alpha\gamma$ *deux points* ζ, η, *tels que l'on ait la proportion* $\alpha\zeta : \zeta\eta :: \alpha\delta : \delta\gamma$. » *D'un point quelconque* ε *pris sur le côté* $\alpha\beta$ *je mène les droites* $\varepsilon\zeta$, $\varepsilon\eta$, *que je prolonge* » *jusqu'à leurs points respectifs de rencontre,* $\varkappa$ *avec* $\beta\lambda$, θ *avec* $\beta\gamma$. *Je mène* $\theta\varkappa$; *et je* » *dis que cette droite est parallèle à* $\alpha\gamma$. »

(Nous voyons d'abord ici un exemple de théorème *local*, puisque tous les points de la droite $\alpha\beta$ jouissent de la propriété énoncée, et qu'ainsi cette ligne est le lieu du point ε. Mais il ne s'agit en aucune manière de chercher ce lieu puisque *la figure est donnée*, malgré l'absence d'un énoncé complet.)

Cela posé, le parallélisme des droites $\alpha\gamma$, $\varkappa\theta$, entraîne la proportion $\beta\delta : \beta\gamma :: \delta\varkappa : \gamma\theta$; or, cette proportion n'est autre chose que le porisme également donné par Pappus, en ces termes (je ne fais qu'ajouter les lettres) :

« Si de deux points donnés [ζ, γ] on mène deux droites [$\zeta\varepsilon$, $\eta\varepsilon$] se coupant sur une » droite [$\alpha\beta$] donnée de position, et que l'une d'elles [$\zeta\varepsilon$] détermine sur une droite [$\alpha\delta$] » donnée de position, un segment [$\delta\varkappa$ mesuré] à partir d'un point [δ] donné sur cette » dernière, la seconde droite [$\eta\varepsilon$] déterminera aussi sur une autre droite (*) [$\beta\gamma$] donnée de position, à partir d'un point [γ] donné sur cette droite, un segment [$\gamma\theta$] qui » sera au premier dans un rapport donné, [le même que celui des longueurs $\beta\delta$, $\beta\gamma$]. »

Observons maintenant que si l'on se donne la valeur de l'un des termes du rapport $\delta\varkappa : \gamma\theta$, l'autre terme sera connu : et c'est ainsi que le porisme aura ajouté ce qui manquait à l'hypothèse du théorème local.

Le porisme suivant consiste en ce que, si le rapport $\alpha\zeta : \alpha\eta$ est égal au rapport donné $\alpha\delta : \alpha\gamma$, *le point* ε *est situé sur* $\alpha\beta$.

Le porisme suivant serait que, si ε est sur $\alpha\beta$, *le rapport* $\alpha\zeta : \alpha\eta$ *est donné*.

Etc., etc. — (*Voir* ci-après l'Annotation T.)

(I) L'article τῶν donne lieu à une conséquence qui est ici de la plus grande importance; car il exige impérieusement que la traduction dise (avec l'article) : *des porismes*, comme je l'avais écrit, et non *de porismes* comme M. Breton le soutient avec insistance. Il ne s'agit pas d'*un genre* de porismes, mais des Porismes considérés comme formant un genre parmi les diverses sortes de propositions; et dans ce genre (c'est-à-dire dans le genre des Porismes), les Lieux sont une espèce. Mais cette espèce, celle des *porismes-lieux*, est très-nombreuse, puisqu'il y a les variétés diverses des *lieux-plans*,

(*) Je ne fais aucune difficulté de reconnaître que dans ma Seconde Notice (Journal *La Science*, p. 188, col. 1re : T. P. p. 13), en prenant les points $\varkappa$, θ, au lieu des points ζ, η, pour interpréter ce porisme, j'avais obtenu un résultat moins satisfaisant, puisqu'à la place des deux droites $\beta\delta$, $\beta\gamma$, qu'exige l'expression ἀπὸ ἑτέρας, je n'en considérais qu'une. Je reconnais également que M. Breton avait donné l'explication ci-dessus (que je lui emprunte en corrigeant la mienne); mais je l'avais cherchée dans un endroit, et elle était dans un autre. Quant à la conclusion que M. Breton tire de cette inadvertance, en affirmant que *je n'ai pas lu son travail*, je n'ai pas le droit de dire qu'il y a ingratitude de sa part puisque les apparences sont ici contre moi; mais voyez ci-dessus le § I

des *lieux-solides*, etc. C'est pourquoi, après avoir mis à part les Porismes qui ne sont pas des Lieux, on a pu faire avec les autres des *livres distincts;* d'où il résulte qu'Euclide n'avait plus à traiter que des Porismes qui ne sont pas des Lieux ; voilà évidemment la suite logique du discours : car, à quoi bon faire ici l'énumération des diverses sortes de Lieux, si ce n'eût été pour faire voir combien ils sont nombreux?

Ces remarques n'empêchent pas que l'on ne puisse trouver des Lieux dans les Lemmes d'Euclide, en y faisant varier certains points, certaines lignes ; mais ceci n'est qu'accidentel. Et que l'on n'oublie pas d'ailleurs que dans le langage des Anciens, le mot *lieu* désigne simplement un théorème indéterminé, mais nullement une description (*voir*, plus haut, Annotation H).

J'ai donc dû amender la traduction de M. Breton et la mienne, d'abord en admettant ce sens : que *les lieux abondent*, et non que *les porismes abondent* comme je l'avais écrit d'abord ; et ensuite en mettant au pluriel les mots *titres particuliers* qui se rapportent aux livres intitulés *Lieux plans*, *Lieux à la surface*, etc.

C'est ici que se présente l'occasion et la nécessité de me justifier des erreurs que M. Breton [*] m'accuse d'avoir commises, « non-seulement sur le sens de ces divers » détails relatifs aux *lieux*, mais aussi, et *très-complétement*, dans tout ce que j'ai dit » du VIIe livre de Pappus ». « Je prends même (tant M. Breton m'accorde ici de sagacité), » je prends les 38 lemmes relatifs aux *porismes* pour une analyse développée des trois » Livres de Porismes composés par Euclide. »

Obligé ainsi de me mettre sur la défensive, je me suis empressé de rechercher dans mes deux Notices, où et comment j'avais pu émettre de pareilles énormités. Or voici ce que j'ai trouvé : d'abord p. 11 de ma première Notice (n° 10 de *La Science*, p. 888, » col. 1) : que « le recueil dont le VIIe livre présente le *résumé* (ce qui est tout le con- » traire d'une analyse développée), porte un titre qui signifie *répertoire d'analyses*, etc. Mais que ressort-il de là, si ce n'est que les 38 lemmes de Pappus contiennent la substance, *non l'analyse développée* du Traité d'Euclide? En second lieu, j'ai parlé, il est vrai (*Ibid.* p. 886, col. 2. T. P. p. 6), d'une « analyse développée que Pappus donne *plus loin*, » des trois livres de porismes composés par Euclide » ; mais plus loin que quoi? réponse : plus loin que le mot ἀναλυόμενος appartenant au titre du livre, mot que je venais de traduire. Avec un peu d'attention, M. Breton aurait vu qu'il ne s'agit nullement ici des 38 lemmes de Pappus, mais de l'analyse des trois livres de Porismes, traduite par Commandin, aux pages 244-247, sous la rubrique *De porismatibus*. J'aurais pu supprimer, il est vrai, le mot *développée ;...* mais en voilà beaucoup trop sur ce sujet :

Hanc veniam petimusque damusque vicissim.

Quelques-unes des critiques de M. Breton sont mieux fondées ; et je m'empresserai toujours d'en reconnaître la justesse quand il y aura lieu. C'est ainsi que je rétracte la

---

[*] Dans sa Note (*) afférente à l'Annotation β' (où elle est marquée de deux astérisques au lieu d'un seul).

proposition que j'avais faite d'intercaler la conjonction *καὶ* entre les mots *λήμματα* et *τὰ ζητούμενα*, et cela, par une raison que l'on verra plus loin (*Annot.* M).

(J) M. Breton me reproche ici de supposer que *τόπῳ* est sous-entendu devant *ἀναλυομένῳ*. Cependant j'avais beaucoup insisté dans ma Seconde Notice, sur cette circonstance, que le mot *ἀναλυόμενος* se trouve ordinairement seul dans Pappus. Ainsi, par exemple, après le titre du VIIe livre se trouve cette annotation : *περιέχει δὲ λήμματα τοῦ ἀναλυομένου* : *ce livre contient les lemmes de l'Analyomène ;* puis alors le VIIe livre commence ainsi : *Ὁ καλούμενος ἀναλυόμενος, Ἑρμόδωρε τέκνον, κατὰ σύλληψιν, κ.τ.λ.* :
« *Ce que l'on nomme Analyomène*, Hermodore mon fils, *par une sorte de syllepse* [*],
» est une matière propre, préparée à la suite des Éléments communs, pour ceux qui
» veulent acquérir, dans les figures, la faculté inventrice des problèmes qui leur sont
» proposés ; et c'est pour cet usage seul qu'elle a été établie. Ce recueil a été composé
» par trois écrivains différents, savoir : Euclide, l'auteur des Éléments, Apollonius
» de Perge, et Aristée l'ancien. On y procède par voie d'analyse et de synthèse, etc. »
(*Voyez* ci-dessus, § II, p. 23.)

(K) Voici, je pense, la véritable origine de ce mot. D'après le témoignage de Plutarque [**] et de Suidas [***], le *σκολιὸν* était une chanson de table que l'on chantait à la ronde et à tour de rôle ; et les convives se passaient de main en main une branche de myrte que chacun gardait pendant tout le temps que durait sa chanson. Par analogie, lorsqu'un certain nombre d'énoncés présentaient des parties communes, quand ces parties communes avaient été dites une fois, elles étaient censées se transmettre à l'énoncé suivant. Le mot *σκολιότης*, formé d'après les règles ordinaires de la dérivation des mots grecs, m'a paru rendre très-bien cette transmission.

(L) Ayant annoncé que dans le cas, peu probable cependant, où l'on se refuserait à reconnaître la proposition de Pappus comme étrangère au livre des Porismes, je reproduirais l'interprétation que j'en avais donnée pour cette hypothèse, je vais l'exposer ici.

« Soit A, B, C, D, E, F (Seconde Notice, *La Science*, p. 181, col. 1re : T. P. p. 5),
» la figure en question : soient donnés les trois points A, B, C, situés en ligne droite,
» ainsi que les droites AD, BE, sur lesquelles doivent se trouver respectivement les
» points donnés D, E : je dis que le point F sera aussi sur une droite donnée. »

Le sens de la proposition ainsi énoncée et interprétée, serait tout simplement que

---

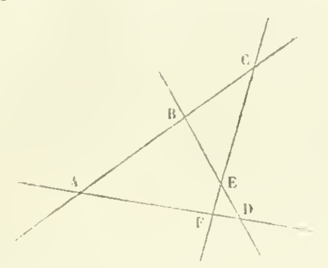
[*] La version de Commandin : *ut summatim dicam...*, ne rend pas le grec : la *syllepse* porte sur le mot *ἀναλυόμενος* et non sur le discours général de Pappus. La syllepse consiste en ce que l'expression *ἀναλυόμενος* suppose un mot sous-entendu. Que ce mot soit *τόπος*, cela est plus que vraisemblable, vu qu'on le rencontre quelquefois ainsi employé ; mais *ἀναλυόμενος* seul, avec le même sens, est une locution reçue, conforme à l'usage, et qui doit être considérée comme complète et se suffisant à elle-même.

[**] Sympos. I, quæst. 1, p. 615 B

[***] V. Σκολιόν.

cinq points du quadrilatère déterminent le *sixième* (sous certaines conditions), ce que l'on ne voit pas sur-le-champ, et ce que, par conséquent, on peut se proposer de démontrer. Or, voici la démonstration :

Soient A, B, C, AD, BE [*], les trois points et les deux droites qui sont donnés, etc.



D'abord, le point D d'intersection des deux droites étant nécessairement l'un des points restants, il est nécessaire de stipuler à laquelle des deux droites on l'attribue : soit AD cette droite. Alors il reste à donner le point E sur BD. Cela fait, menons CE ; cette droite, par son intersection avec la droite AD, déterminera le point F : c'est ce qu'il fallait démontrer.

Si « le sentiment des choses géométriques repoussait mon interprétation », comme l'affirme M. Breton, il faudrait, pour être conséquent, refuser aussi ce sentiment à Euclide lui-même, au sujet de certaines propositions du livre des *Données*, qui sont d'une *simplicité* tout aussi *triviale*, et à propos desquelles cet illustre Maître des Modernes ne s'épargne pas les frais de démonstration.

Par exemple (Prop. 1) : *Étant données deux grandeurs, leur rapport est donné.* — (Prop. 25) : *Si deux lignes données de position se coupent mutuellement, leur point d'intersection est donné.* — (Prop. 26) : *Si les extrémités d'une ligne droite sont données de position, la droite est donnée de position et de grandeur.*

Quant à la proposition relative au quadrilatère, entendue comme je viens de l'expliquer, ce serait un simple corollaire de la proposition 25 : M. Breton lui-même en a fait la remarque (IIe Supplément, p. 119, ou T. P., p. 31); dès lors, comment a-t-il pu en conclure que mon interprétation était erronée? c'est ce qu'il ne m'est pas possible de comprendre [**].

L'explication que j'avais donnée du lemme généralisé est analogue à la précédente. Mais comme, en tout état de cause, la solution de la question générale des porismes ne dépend nullement de ce lemme, et que d'ailleurs la question elle-même a totalement changé de face par suite des observations qui précèdent (*ci-dessus*, § I, n° 10), je me

[*] Dans l'explication de la figure, page 11 de ma Seconde Notice (*La Science*, p. 187, col. 2), il y avait erreur de lettres.

[**] Je ne comprends pas davantage comment mon interprétation du lemme généralisé tombe *en défaut* lorsqu'on se borne à la première hypothèse, *celle où il n'est pas question de nombre triangulaire* : comme si les deux énoncés ne se réduisaient pas à un seul ! Seulement, la première forme est tronquée et la seconde est complète, καθολικώτερον : c'est toute la différence.

contenterai, pour le théorème généralisé, de renvoyer au journal *La Science* (p. 181, col. 2, et 187, col. 2; 2e Notice, T. P., p. 7 et suiv.), où j'ai développé mon explication [*].

Avant de terminer ce qui est relatif à ce théorème, je ferai observer que le mot δέκα pourrait bien indiquer 10 *livres de lieux;* car plus haut, après les mots τῶν γοῦν τόπων ἐστίν, il y a aussi, dans les manuscrits, le mot δέκα, *que M. Breton a supprimé.* Or, dans l'analyse de l'Ἀναλυόμενος, Pappus n'en a mentionné que 9; mais ici se trouve signalée une nouvelle espèce, ἃ δὲ γραμμικῶν, dont il n'avait point été question. S'il y avait un livre de *lieux linéaires*, cela fait 10 livres en tout : c'est peut-être ce nombre qui est mentionné aux deux endroits cités.

(M) Pour comprendre le véritable sens de cette phrase, il faut voir ce que signifient les mots ὑπόθεσις, ζητούμενα, συμβεβηκότα. Or, nous trouvons dans Proclus (*in Eucl.*, p. 56; Barocc., p. 116) : 1° que « Tout théorème et tout problème complet se composent de ces 6 parties, la proposition, l'exposition, la détermination, la construction, la démonstration, et la conclusion »; 2° que « La proposition (c'est-à-dire l'énoncé) dit ce qui est donné et ce qui est cherché, parce que toute proposition parfaite présente ces deux choses : ἡ μὲν πρότασις λέγει τίνος δεδομένου, τί τὸ ζητούμενόν ἐστιν· ἡ γὰρ τελεία πρότασις ἐξ ἀμφοτέρων ἐστίν ».

Par exemple, dans le théorème Ier, que *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux paires de côtés égaux chacun à chacun, ainsi que les angles compris*, les *choses données* sont *l'égalité des deux paires de côtés* et *celle des angles compris*, et les choses *cherchées* sont *l'égalité des bases, celle des angles adjacents à ces bases*, et enfin *celle des triangles.*

Il n'y a donc aucune incertitude sur le sens du mot ζητούμενον : il représente l'objet de la conclusion; et c'est ainsi, par exemple, qu'au lemme VIe de la *section déterminée*, la conclusion est suivie de ces mots : τοῦτο δὲ ἐζητοῦμεν (*voyez* ci-dessus, Annotation E). Ceci est d'ailleurs confirmé par l'expression λήμματα τὰ ζητούμενα employée par Pappus, et d'où il résulte que les choses cherchées dans les lemmes sont identiques avec ces lemmes eux-mêmes.

Quant au mot ὑπόθεσις, c'est-à-dire à l'hypothèse, il est ici évidemment synonyme de δεδομένον, la chose donnée : car, d'après Aristote (*Anal. prior.* I, text. 25), « L'hypothèse est une proposition que l'auditeur accorde sans contestation à celui qui l'a mise en avant » (Cp. Procl. *in Eucl.*, p. 22, et Barocc., p. 44); et même, dans la géométrie moderne, nous n'avons pas d'autre manière de nous exprimer : c'est-à-dire que

---

[*] Toutefois je ferai observer que les manuscrits donnent ὧν τριῶν et non τρία comme l'a écrit M. Breton [p. 4 (91)] des *Recherches nouvelles*], en affirmant [*ibid.*, p. 7 (95)] que le sens exige τρία, ce qui prouve seulement qu'il n'avait pas entendu le texte comme moi : c'est tout ce que j'ai voulu dire (*La Science*, p. 187, col. 1 : T. P. p. 10); mais je m'étais mal exprimé. Il est vrai que moi-même j'ai proposé de lire ὑπαρχουσῶν au lieu de ὑπάρχον : mais le texte, évidemment corrompu en cet endroit, est ici livré aux conjectures.

« l'énoncé de tout théorème se compose de l'hypothèse et de la conclusion ».... Est-il besoin d'insister là-dessus?

Reste le mot συμβεβηκότα (*voir* plus haut l'Annotation G). Or, l'emploi parallèle des deux expressions τῶν συμβεβηκότων καὶ ζητουμένων (et plus loin, τῶν δὲ συμβαινόντων καὶ ζητουμένων), mises en opposition, dans toutes les circonstances, avec ὑποθέσεις, fait voir que les choses qualifiées ζητούμενα, et les choses qualifiées συμβεβηκότα, ont cela de commun, d'être les unes et les autres des *résultats;* mais que les συμβεβηκότα sont des résultats *non demandés*, c'est-à-dire qui se présentent à l'aventure et sans être attendus. Cela, d'ailleurs, est conforme à la signification propre du mot συμβεβηκός (en latin *accidens*), et conduit en outre à cette conséquence très-importante, que la matière des porismes se trouve exclusivement dans les συμβαίνοντα, nullement dans les ζητούμενα proprement dits. C'est là un point sur lequel je regrette de me trouver en complet désaccord avec M. Breton dans sa Note (v'); et de là résulte, pour le dire en passant, que les συμβεβηκότα sont en quelque sorte une subdivision des ζητούμενα, et nullement des ὑποθέσεις. En d'autres termes, le συμβεβηκός est un supplément du ζητούμενον, lequel supplément correspond au πόρισμα considéré comme étant, de son côté, un supplément de l'ὑπόθεσις, ou plutôt de la πρότασις complète. Quant à la démonstration du πόρισμα ou du συμβεβηκός, elle est implicitement comprise dans celle de la πρότασις ou du ζητούμενον [*]. (*Voyez* plus haut, Annotation D.)

Enfin, on voit ici pourquoi les résultats συμβεβηκότα sont les mêmes pour plusieurs hypothèses différentes : car c'est ainsi, pour expliquer la chose par un exemple, que si l'on veut avoir, dans une figure, une droite *troisième proportionnelle* à deux droites données, on pourra faire dépendre la longueur cherchée, soit de la théorie des *triangles semblables,* soit de celle du *triangle rectangle*, soit de celle du *cercle*, etc., etc., et cela de diverses manières dans chaque cas.

(N) Je suppose qu'il y avait primitivement : ἐν ἀρχῇ μὲν τούτου [βιβλίου] ζήτει τὸ διάγραμμα : *cherchez la figure au commencement du livre.* On sait que l'abréviation ζ pour ζήτει est usitée.

(O) M'étant expliqué plus haut (*Annot.* H) sur l'objet principal de la Note (z') de M. Breton, je n'ai point à y revenir ici, si ce n'est pour témoigner de nouveau mon étonnement de voir mon honorable adversaire supposer que j'abandonne mon interprétation. Il y a sans doute ici quelque malentendu.

(P) Je ne comprends pas davantage comment M. Breton peut prétendre que « ce » porisme est conçu dans des termes qui impliquent l'idée de mouvement ». (*Voir*, à ce sujet, tant le § I que l'Annotation H.)

---

[*] La définition blâmée par Pappus serait donc plus exactement exprimée, à mon sens, si l'on disait que *le porisme est ce qui manque au théorème local, par suite de ce qui manque à son hypothèse.*

(Q) L'observation de M. Breton sur la manière dont j'avais traduit *ἀποτομη* est très-fondée, et la raison pour laquelle j'avais hésité à adopter la définition d'Euclide ne l'est point [*].

Il s'agit de reconnaître qu'une ligne peut être exprimée par une formule telle que $a - \sqrt{b}$, ou, plus spécialement, qu'elle peut satisfaire à l'équation

$$a - b\sqrt{2} = c:$$

car alors c sera une *ligne apotome*. Ce cas ne peut avoir lieu sans que l'on ait en même temps

$$a = c + b\sqrt{2},$$

c'est-à-dire sans que a soit une *ligne binome*. Les deux cas vont donc toujours ensemble; et, par conséquent, il n'y a point à s'étonner de voir toujours citer la ligne apotome et jamais la ligne binome.

Il s'agit donc, ai-je dit, de trouver dans les démonstrations des lemmes de Pappus, quelque relation équivalente à celle-ci :

$$a - b\sqrt{2} = c,$$

d'où

$$(a - c)^2 = 2b^2.$$

Or, on rencontre en effet, dans ces démonstrations, nombre d'équations susceptibles d'être identifiées à cette dernière : elles sont faciles à trouver dans les *Recherches nouvelles*, sans que j'aie besoin d'en faire aucune citation particulière.

L'exactitude de l'explication que je viens de donner ici peut d'autant moins être mise en doute, que le mot *ἀποτομή*, employé dans le même sens que chez Euclide, appartient certainement à la langue de Pappus (*voyez*, par exemple, livre IV, théor. III).

(R) Je rétablis le sens du mot *θέσει*, que M. Breton change sans aucune espèce de motif valable, et cela de son propre aveu. En effet, d'après sa déclaration (*Comment.*, § XIV), s'il fait ce changement, c'est afin de ne pas « admettre parmi les porismes une » proposition de l'espèce de celles qui font l'objet des *Données* d'Euclide », et ensuite parce que, toujours d'après M. Breton, « les énoncés ou les hypothèses des questions » traitées par Euclide roulaient *exclusivement* sur des figures *variables de forme* suivant » certaines conditions ». Or, c'est ce que je nie formellement, et ce qui, de la part de M. Breton, est une véritable pétition de principe, comme il résulte de notre § Ier, no 9 (ci dessus, p. 18).

---

[*] *Voir* dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (17 octobre 1853) le *Rapport* de M. Chasles *sur un Mémoire de M. Wœpcke* relatif aux *Travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles, etc.*

(S) M. Breton déclare, dans sa Note (f''), que, d'après mon observation, il a remplacé le mot *rectangle* par le mot *espace*, comme l'exige le mot χωρίον.

Par compensation il me reproche, et ceci avec raison, d'avoir confondu deux énoncés différents d'Apollonius. Ce malentendu, dont je me reconnais le seul coupable, étant ainsi rectifié, il devient inutile d'insister sur ce point [*].

(T) « Rien dans le texte, dit ici M. Breton, ne signifie que les droites dont il est « question dans ce porisme, et qui sont menées d'un point donné, doivent aboutir » à deux points donnés. »

Cependant, 1° M. Breton doit admettre que le point B est *donné*, puisque cela est dans le texte; 2° M. Breton considère les deux points B et C comme jouant le même rôle, puisqu'il les appelle *deux points variables:* donc 3° le point C est aussi *donné*.

En d'autres termes, M. Breton reconnaît, par sa traduction même, qu'il faut mener deux droites d'un point (A) à deux autres points (B, C). Il reconnaît implicitement, par là, que le texte est incomplet, et qu'au lieu des simples mots τόδε δοθέν, il faut suppléer τόδε δοθὲν σημεῖον, καὶ ἕτερον τόδε δοθὲν σημεῖον, c'est-à-dire qu'*il existe un point donné* (A) *tel que les* [*deux*] *droites menées de ce point donné*, *l'une au point donné* (B), [*l'autre au point donné* (C)], *comprennent un angle donné d'espèce*.

Cela posé, comment M. Breton peut-il appeler *variables* les deux points donnés B et C, lorsque partout ailleurs il traduit δοθέν par *constant?* c'est ce que je ne puis m'expliquer.

Je suis donc obligé de m'arrêter un instant ici et d'insister sur ce passage, d'autant plus qu'aucun autre, à mon avis, n'est plus capable de mettre dans tout son jour l'inadmissibilité du système de M. Breton.

En effet, le lemme XXIX de Pappus est un problème qui s'énonce ainsi : *Un segment de cercle étant donné*, *y inscrire un angle dont les côtés soient entre eux dans un rapport donné* (*Journal de Mathématiques*, t. XX, p. 239: *Recherches nouvelles*, p. 31; — et t. III, 2ᵉ série, p. 133 : IIᵉ Supplément, p. 46). Et, à ce sujet, M. Breton pose la question suivante : « M. Vincent suppose-t-il que la question à résoudre (dans le 6ᵉ porisme) est celle-ci : *Sur une droite donnée construire un triangle donné?* »

Je réponds, de mon côté, par la question suivante : « *M. Breton suppose-t-il qu'il* » *se puisse agir d'autre chose?* » en ce cas il aurait dû le dire, à défaut de quoi je suis obligé de raisonner dans l'hypothèse qu'il m'attribue avec raison, puisque c'est la seule admissible.

Dès lors, quoi de plus naturel que de considérer le 6ᵉ porisme du IIIᵉ livre comme donnant la solution de la question posée par M. Breton? Est-il possible même de le considérer autrement?

---

[*] Le *post-scriptum* de ma Seconde Notice avait pour but cette rectification ; il a été rédigé à la hâte et l'épreuve non corrigée, comme il est facile de le constater. Le mode de publication du journal *La Science* rend parfaitement compte d'une semblable inadvertance.

Les mêmes considérations sont applicables au VIIe porisme. Il est bien évident, pour moi du moins, que le point donné est le milieu de l'arc.

Ces deux porismes me paraissent d'ailleurs fournir une justification frappante de la théorie développée dans l'Annotation H : ce qui manque ici à l'énoncé du théorème local, c'est la détermination du sommet du triangle. Dans le premier cas, la position du sommet dépend de la valeur des angles à la base; dans le suivant, ce sommet doit être placé au milieu de l'arc.

Mais (qui le croirait?) c'est l'évidence même de ces propositions qui répugne à M. Breton : « Y a-t-il dans tout cela, dit-il (Note h''), quelque chose... qui exige *de » l'invention?*.... » (Note i'') : « Assurément si une semblable proposition se dis- » tingue par quelque côté, ce n'est pas par *l'invention*.... » (Note k'') : « *Le senti- » ment des choses géométriques* s'élève contre de semblables interprétations ».

Il suffit, pour répondre à ces assertions, de renvoyer à ce que j'ai dit plus haut, tant au § Ier, que dans l'Annotation L ; et j'ajoute ici que c'est précisément de cette sorte de porismes qu'il s'agit au sujet de l'abus que Pappus reproche aux géomètres de son temps. — (*Voir* ci-dessus, Annotation F. — *Voyez* aussi l'Annotation U qui suit.)

(U) Ce dernier porisme en comprend *deux* en réalité, dont chacun correspond à l'un des deux précédents pris en ordre inverse. La droite mentionnée est la tangente menée à l'arc par le sommet du triangle, et le cas du parallélisme est celui où le sommet du triangle se confond avec le milieu de l'arc : c'est le cas du porisme précédent. Dans ce même cas, la flèche de l'arc est un *maximum*, ce que Pappus et les géomètres dont il commente les écrits, désignent par l'expression μοναχός employée pour désigner les *points singuliers*, les *valeurs singulières*.

— Telles sont les observations que nous avions à faire sur la traduction du texte de Pappus; voyons maintenant celui de Proclus.

(V) Les critiques que M. Breton adresse ici à ma traduction (qu'il me permette de le dire) ne sont pas plus fondées que sa propre traduction. Γένεσις est, dans le cas présent, la *création*, la *construction* d'une chose qui n'existe pas : par exemple, la *construction* d'un triangle isoscèle sur une droite donnée prise pour base (Eucl., I), est appelée γένεσις par Proclus (p. 57) ; et Barocci (p. 119) traduit ce mot par *ortus*. Au contraire, la recherche du centre d'un cercle n'est point une création, parce que ce centre existe implicitement dès que le cercle est donné. De même, le plus grand commun diviseur de deux nombres existe; mais il n'est pas en évidence : on le trouve, mais on ne le crée pas.

Quant à soutenir que les mots *raisonnement facile* approchent plus de θεωρία ἁπλῆ que les mots *pure* ou *simple théorie*, c'est ce que personne, je pense, n'admettra, malgré l'assurance avec laquelle M. Breton (Note q'') affirme que *M. V. se trompe encore ici.* Plus loin (Note r''), M. Breton me reproche d'avoir traduit les mots θεωρῆσαι δεῖ par ceux-ci : *c'est une affaire de théorie*, tandis que lui-même a écrit que *c'est l'objet d'un*

théorème, en donnant pour raison qu'il faut « rappeler l'idée du théorème, puis celle » du problème ». A ce compte, pourquoi M. Breton se sert-il du mot *opération* au lieu d'employer celui de problème?

Puis ensuite (Note s''), j'ai eu tort, toujours suivant M. Breton, de dire que dans un théorème, *il ne s'agit que d'acquérir la connaissance* de la chose. — Etc., etc.

J'ai vraiment honte de me trouver arrêté sur de semblables minuties; mais il faut pourtant bien montrer comment M. Breton semble s'attacher, évidemment sans s'en apercevoir, à transporter le débat loin de la question principale, et tout à fait hors de son véritable terrain.

(W) Les mots que j'ai renfermés entre crochets rendent le véritable sens; c'est ainsi que φίλος ἢ ἐχθρὸς ἢ μεταξύ signifie *ami ou ennemi ou neutre* (*Dictionn.* d'Alexandre, d'après Aristote).

(X) Je persiste à croire que *créations* est ici la traduction exacte de γενέσεις (*voir* ci-dessus l'Annotation V); et le mot *déduction* prouve que M. Breton n'a pas saisi le sens de ce passage. Il en est de même lorsqu'il rend θεωρία ψιλὴ par *raisonnement exempt de difficulté*, au lieu de dire *simple théorie*, *pure théorie*, *théorie abstraite* (*voir* Notices et Extraits des Manuscrits, t. XVI, 2e partie, p. 114).

Si M. Breton n'avait pas écrit par un grand Δ (au lieu d'un petit) le mot δεῖ, et s'il s'était aperçu que le point final doit être transporté avant οὔτε θεωρία ψιλή (où il n'a pas même mis une virgule), il aurait sans doute compris le passage comme moi, et se serait abstenu de parodier ma traduction comme il le fait dans sa Note (y'').

(Y) M. Breton reconnaît, dans le § VIII de son Commentaire, qu'il n'y a point identité entre les manières de voir de Pappus et de Proclus. Dès-lors pourquoi, dans sa Note (x''), semble-t-il vouloir me rendre responsable de la discordance qui peut exister entre ces deux auteurs? Puis-je faire que Proclus dise la même chose que Pappus, et dans les mêmes termes? Pappus signale les variations d'opinion qui s'étaient déjà produites de son temps; Proclus à son tour en signale d'autres survenues depuis. Or, dans cet état de choses, que pouvons-nous faire, si ce n'est de constater ces dissentiments, de les faire ressortir, et cependant de tâcher, au milieu d'une telle diversité d'opinions, de saisir les points par lesquels elles se touchent et peuvent se ressembler?

Pour moi, voici ce que je trouve de commun dans toutes ces appréciations; et c'est ce qu'explique parfaitement le passage de Proclus entendu comme il doit l'être (*voir*, ci-dessus, Annotation V), savoir: Les deux formes principales sous lesquelles peuvent être présentées les vérités géométriques, ayant été fixées par des définitions rigoureuses, toutes les fois que l'on rencontrait une proposition qui ne satisfaisait pas complétement à l'une d'elles, une proposition à laquelle manquait quelqu'une des conditions de la définition, où se manifestait quelque irrégularité, on la nommait *porisme*. D'où résultaient nécessairement des porismes de diverses sortes, qui pouvaient, chacune à son tour, attirer l'attention d'un auteur, influer sur les travaux d'une époque.

Quant aux Porismes d'Euclide, il est clair que pour en bien connaître la nature, il faut s'en rapporter à Pappus qui en a résumé les principes fondamentaux, et surtout ne pas perdre de vue sa première définition (*parti à tirer* d'un résultat), puisqu'il semble vouloir jeter de la défaveur sur la seconde, ou du moins chercher à faire entendre que les géomètres qu'il nomme *les Modernes,* s'y restreignaient beaucoup trop, et abusaient même de la permission de s'y renfermer. C'est à ce point de vue étroit qu'il faut, suivant moi, rapporter les *cas singuliers* ou *μοναχοί*, c'est-à-dire les cas de *maximums* et de *minimums*, de *parallélisme*, *etc.*, dont les VIIe et VIIIe porismes du IIIe livre nous donnent des exemples (*voir* ci-dessus, Annot. T et U).

Toutefois, il ne faut pas oublier la « mention *fort importante* » comme la qualifie avec raison M. Breton (Note y'') « que Proclus fait expressément des Porismes d'Eu- » clide, en appliquant à ces porismes ce qu'il vient de dire » de la recherche du centre d'un cercle donné, et de celle du plus grand commun diviseur de deux quantités, parce que cette assimilation prouve surabondamment, comme je l'ai dit plus haut, qu'on donnait le nom de porisme à toute proposition non susceptible d'être assimilée exactement à un théorème ou à un problème.

Et à ce propos, il n'est pas sans importance de faire observer que l'on s'accorde généralement à qualifier de problèmes les deux propositions d'Euclide citées par Proclus, en faisant porter le porisme exclusivement sur ces deux corollaires, savoir : que « La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre », et que « Toute grandeur qui en divise deux autres divise leur plus grand commun diviseur ». Si cette manière de voir était suffisamment autorisée par les manuscrits (mais malheureusement elle ne l'est pas, du moins pour la première des deux propositions citées), on aurait le droit d'en conclure que Proclus s'était trompé à l'égard de ces propositions ; et, par suite, il en résulterait une nouvelle raison d'affirmer que *tous les porismes sont des corollaires*, en employant ce dernier mot dans le sens moderne (*voir* le § I).

(Z) M. Breton arrête ici sa traduction du texte de Proclus, et il a ses raisons pour cela ; quant à moi, j'ai les miennes pour la continuer : mon but est de faire voir que les deux sortes de porismes ne diffèrent pas autant qu'on l'a pensé, ou plutôt, qu'il n'y a essentiellement qu'une sorte de porisme. A mon avis, la seule distinction qu'on puisse établir entre eux avec quelque apparence de raison, consiste en ceci : que certains porismes se présentent comme à l'aventure : ce sont ceux que l'on rencontre dans les Éléments, *κοινὰ στοιχεῖα* [*]; tandis que les autres, dépendant d'une déduction moins simple, moins directe, moins élémentaire, ne se découvrent que lorsqu'on les cherche, après s'être livré préalablement à l'étude des théories moins vulgaires, afin d'acquérir, comme le dit Pappus, la *puissance inventive*, *δύναμις εὑρετική* (*voyez* § I, n° 6). Ce sont ces derniers porismes qui composaient les Livres d'Euclide sur la matière, ainsi que

---

[*] Plusieurs semblables porismes se rencontrent dans la *Géométrie* de Legendre, sous le simple titre de *scholies*

les autres Traités compris dans le Τόπος ἀναλυόμενος; et si Proclus semble établir une division plus ou moins tranchée entre les deux classes (non entre les deux espèces), c'est uniquement parce que, devant se borner à commenter les Éléments, il n'avait point à s'occuper de porismes qui ne s'y rencontrent pas : voilà tout ce qu'il a voulu dire, et dont il a cru devoir avertir le lecteur.

§ IV.

Résumé et conclusions.

Mes conclusions étant suffisamment claires d'après tout ce qui précède, il ne me reste qu'à examiner celles de M. Breton, c'est-à-dire à faire voir comment elles s'écroulent faute de base.

Les expressions d'*erreurs graves*, d'*idées fausses*, d'*interprétations vicieuses, etc.*, ne m'ont point été épargnées dans le cours du Mémoire de mon savant adversaire; elles devaient se retrouver ici, et elles s'y retrouvent en effet avec un luxe qui aurait vraiment de quoi effrayer. Voyons cependant les détails.

Le 1° des Conclusions de M. Breton est détruit par le sens plus exact que l'on doit donner ici au mot εὕρεσις (ci-dessus § I, n° 6); il l'est par les définitions précises du *théorème*, du *problème*, du *porisme* (§ II; et § III, Annot. D, H, M, Y); il l'est enfin par l'élimination définitive du mot *corollaire*, qui, n'étant pas grec, est *intrus* dans la discussion (§ I, n° 11), à moins qu'on ne le substitue PARTOUT, comme traduction, au mot *porisme*.

Le 2° est détruit par les Annot. B, E, G, H, et surtout par les définitions attribuées, *sur preuves*, dans l'Annot. M, aux mots ὑπόθεσις, ζητούμενον, συμβεβηκός.

De même, le 3° est détruit par les Annot. C, D, W, Y.

Le 4° est détruit par le § I (n° 10); et par le § III : Annot. H, L, etc.

En résumé donc, QUE RESTE-T-IL DES CONCLUSIONS DE M. BRETON?

Quant à mon IDÉE PRÉCONÇUE, expression que M. Breton me renvoie de nouveau avec affirmation, au lieu d'un simple avertissement dont je l'avais accompagnée en la lui adressant (*voir* ci-dessus § I, n°s 3 et 4), je répète qu'en effet, en lisant le premier travail de l'estimable géomètre, j'avais *préconçu* l'idée qu'il venait de dire ou allait dire le dernier mot sur la question des porismes. Il m'est difficile main-

tenant, je l'avoue, de conserver cette illusion ou cet espoir. Cependant, je continue à regarder comme certain que le plus difficile est fait, grâce à l'explication des Lemmes de Pappus que l'on doit à M. Breton lui-même. La restitution des Porismes d'après ce précieux travail me paraît chose très-faisable, en y procédant d'après les idées que j'ai développées, et que j'aurais voulu pouvoir rendre aussi claires pour les lecteurs qu'elles sont vraies à mes yeux : c'est en ce sens que j'ai pu dire :

De loin c'est quelque chose, et de près ce n'est rien.

Au contraire, en essayant de suivre les idées de M. Breton, le succès de cette entreprise me paraît une chimère. Je souhaite pourtant bien vivement, dans l'intérêt de la Science d'abord, que ce travail soit fait par quelqu'un ; et ensuite, dans celui de mon savant adversaire, je ne désire pas moins qu'il n'ait pas à dire un jour : *sic vos non vobis;* mais si cela arrive, à qui devra-t-il s'en prendre?

23 septembre 1858.

SUR LA FORME $x^2 + y^2 + 5(z^2 + t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Il est clair que la forme $x^2 + y^2 + 5(z^2 + t^2)$, dans laquelle x, y, z, t sont des entiers quelconques, zéro compris, ne peut pas représenter le nombre 3; mais je dis qu'il n'y a pas d'autre exception, en sorte que, pour tout nombre m différent de 3, on peut poser

$$m = x^2 + y^2 + 5(z^2 + t^2).$$

Cela est d'abord facile à constater pour les petits nombres 1, 2, 4, etc., et je suppose la vérification faite jusqu'au nombre 20. La forme citée étant une de celles qui se reproduisent par la multiplication, nous savons que dès que la représentation a lieu pour certains nombres, elle a lieu également pour leurs puissances et leurs produits. Ainsi, quand α et β ne sont pas nuls tous deux à la fois, on peut être assuré que

$$2^\alpha . 5^\beta . 3,$$

qui peut s'écrire

$$2^{\alpha-1} . 5^\beta . 6,$$

ou

$$2^\alpha . 5^{\beta-1} . 15,$$

est comme les nombres 2, 5, 6 et 15 exprimable par la forme qui nous occupe. En général, on n'est jamais gêné par les facteurs 2 et 5 qui peuvent se trouver dans le nombre m; il ne reste dès lors à traiter que le cas de m impair et premier à 5, et l'on peut même supposer $m > 20$, d'après ce qu'on a dit plus haut.

Cela posé, j'observe que si m est de l'une des trois formes

$$8\mu + 1, \quad 8\mu + 5, \quad 8\mu + 7,$$

$5m$ sera de l'une des trois formes

$$8\nu + 5, \quad 8\nu + 1, \quad 8\nu + 3,$$

et, par conséquent, s'exprimera par une somme de trois carrés. Or dans l'équation

$$5m = u^2 + v^2 + w^2,$$

où m est premier à 5, un seul des trois nombres u, v, w peut être divisible par 5, et il faut évidemment qu'un d'entre eux le soit. On peut donc écrire

$$5m = u^2 + v^2 + 25z^2,$$

u et v étant premiers à 5. Mais alors $u^2 + v^2$ devra être divisible par 5 et donner un quotient de la forme $x^2 + y^2$. Il s'ensuit que

$$m = x^2 + y^2 + 5z^2,$$

ce qui rentre bien dans l'équation générale

$$m = x^2 + y^2 + 5(z^2 + t^2),$$

en y prenant $t = 0$.

Si m est de la forme $8\mu + 3$, le raisonnement doit être un peu modifié. On observera qu'alors $m - 20$ est de la forme $8\nu + 7$, et reste d'ailleurs premier à 5, en sorte que la conclusion ci-dessus s'applique à $m - 20$. On peut donc poser, dans ce cas,

$$m - 20 = x^2 + y^2 + 5z^2,$$

d'où

$$m = x^2 + y^2 + 5(z^2 + 2^2),$$

ce qui complète notre démonstration.

Des considérations semblables s'appliquent à d'autres formes quadratiques dont nous pourrons parler une autre fois.

NOTE

Sur le nombre des coniques qui sont déterminées par cinq conditions, lorsque, parmi ces conditions, il existe des normales données. — Construction de ces coniques. — Théorèmes relatifs aux contacts d'une série de coniques et d'un faisceau de droites.

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Capitaine de frégate.

I. Le tableau suivant présente d'une manière synoptique les résultats des recherches auxquelles donne lieu la question proposée [*].

NUMÉROS D'ORDRE des cas proposés.	DONNÉES DE LA QUESTION. Points.	Tangentes.	Normales.	NOMBRE des solutions.
1	4	»	1	3
2	3	1	1	6
3	3	»	2	9
4	2	2	1	8
5	2	1	2	14
6	2	»	3	23
7	1	3	1	6
8	1	2	2	14
9	1	1	3	28
10	1	»	4	51
11	»	4	1	3
12	»	3	2	9
13	»	2	3	23
14	»	1	4	51
15	»	»	5	102

[*] M. Steiner a fait connaître ces résultats dans une livraison récente du *Journal*

Je vais indiquer la marche que j'ai suivie pour les obtenir.

II. Premier cas. — *On donne quatre points et une normale.* (Trois solutions.)

Supposons d'abord que, par les quatre points, on mène une série de coniques tangentes aux rayons d'un faisceau de droites. Une droite donne lieu à deux solutions, et, par conséquent, on obtient deux points de contact sur chacune des droites du faisceau. Mais le sommet du faisceau est lui-même un point de contact relatif à l'un des rayons qui s'y croisent; car, par ce point et par les quatre qui sont donnés, on peut faire passer une conique, qui a une tangente en ce point, et une seule. Donc le lieu géométrique des points de contact de la série de coniques et du faisceau de droites est une courbe du troisième ordre qui passe par le sommet du faisceau et qui n'y a pas de point double. Il sera facile de trouver huit points de cette courbe, lesquels, avec le sommet du faisceau, la détermineront complétement.

Le sommet du faisceau étant à l'infini, les rayons du faisceau de droites sont parallèles; et, si l'on choisit pour leur direction commune celle de la perpendiculaire à la normale donnée, il est évident que les trois points d'intersection de cette normale par la courbe du troisième ordre relative à ce faisceau particulier sont trois points qui, avec les quatre points donnés, déterminent les trois coniques qui seules satisfont à la question proposée.

Remarque. — La solution précédente s'applique d'elle-même au cas où la conique cherchée, au lieu d'être normale à une droite donnée, doit couper cette droite sous un certain angle. Il en est de même des solutions relatives aux cas suivants.

Enfin je fais remarquer, une fois pour toutes, que si la conique devait couper orthogonalement un cercle donné, il suffirait de prendre le centre de ce cercle pour le sommet du faisceau de droites, de construire la courbe du troisième ordre, lieu géométrique des contacts, et de chercher ses intersections avec la circonférence. Chacun des six

de Crelle, sans en donner aucune démonstration et sans indiquer la methode qui l'y a conduit (Crelle, vol. LV, 4e cahier, p. 377).

points ainsi obtenus déterminerait une conique satisfaisant à l'énoncé du problème.

III. Deuxième cas. — *On donne trois points, une tangente et une normale.* (Six solutions.)

Imaginons, comme ci-dessus, le faisceau des droites perpendiculaires à la normale donnée. Il existe, comme on sait, quatre coniques distinctes qui touchent chacune de ces parallèles et la tangente donnée, et qui passent en même temps par les trois points. On a donc d'abord quatre points de contact sur chaque droite du faisceau. En outre, par les trois points donnés et par le sommet du faisceau, on peut mener deux coniques distinctes qui touchent la tangente donnée. Chacune de ces deux coniques a une tangente au sommet du faisceau; donc ce point est doublement un point de contact, et, comme il appartient à toutes les droites du faisceau, c'est un point double du lieu géométrique des points de contact de la série des coniques avec le faisceau de droites; ce qui prouve que ce lieu est une courbe du sixième ordre. Les six points où cette courbe est rencontrée par la normale proposée déterminent, avec les autres données de la question, six coniques qui remplissent les conditions requises.

IV. Troisième cas. — *On donne trois points et deux normales.* (Neuf solutions.)

Soient A et B les deux normales. Imaginons un faisceau parallèle de droites perpendiculaires à A. Il existe six coniques (III) tangentes à chacune de ces droites, et, en même temps, normales à B et passant par les trois points; on a donc d'abord six points de contact sur chaque parallèle. Mais en outre, par ces trois points et par le sommet du faisceau, on peut (II) faire passer trois coniques normales à B; donc trois points de contact sont réunis en un seul au sommet même du faisceau. Ainsi le lieu géométrique des points de contact des coniques passant par les trois points donnés, normales à B et tangentes aux droites perpendiculaires à A, est une courbe du neuvième ordre qui a un point triple au point de concours (infiniment éloigné) de ces perpendiculaires. Chacun des neuf points d'intersection de cette courbe par la normale A détermine, avec les autres données de la question,

une conique normale aux deux droites A et B et passant par les trois points proposés. Donc la question admet neuf solutions.

V. En continuant ce genre de démonstration, on arrive, de proche en proche, et dans l'ordre même où ils sont indiqués, aux résultats consignés dans le tableau du § I. La suite des raisonnements ne peut, d'après ce qui vient d'être dit, présenter aucune difficulté. Cependant, pour plus de clarté, je vais encore examiner séparément les cinq derniers cas, où aucun point ne figure au nombre des données.

VI. Onzième cas. — *On donne quatre tangentes et une normale.* (Trois solutions.)

Chacune des droites du faisceau perpendiculaire à la normale donnée détermine, avec les quatre autres tangentes, une seule conique, donc un seul point de contact. De plus, le sommet du faisceau et les quatre tangentes en déterminent deux distincts. Donc ce sommet est un point double du lieu géométrique des points de contact, et, par conséquent, ce lieu est une courbe du troisième ordre qui coupe la normale donnée en trois points, auxquels correspondent les trois coniques qui résolvent la question.

VII. Douzième cas. — *On donne trois tangentes et deux normales* A *et* B. (Neuf solutions.)

Soit encore un faisceau parallèle de droites perpendiculaires à B. Chacune de ces droites, considérée comme étant une tangente, détermine, ainsi qu'on vient de le voir (VI), avec les trois autres et la normale donnée, trois coniques; on a ainsi trois points de contact sur chacune d'elles. Mais, d'après le résultat du septième cas (tableau I), il passe, par le sommet du faisceau, six coniques normales à A et tangentes aux trois droites. Donc ce sommet est un point sextuple du lieu géométrique des points de contact, lequel est ainsi une courbe du neuvième ordre qui coupe la normale B en neuf points. Chacun de ces neuf points et les autres données de la question déterminent une des coniques cherchées. On a donc neuf solutions.

VIII. Treizième cas. — *On donne trois normales* A, B, C *et deux tangentes* D, E. (Vingt-trois solutions.)

Imaginons un faisceau de droites perpendiculaires à C. Chacune de ces droites étant regardée comme une tangente donnée, on vient de voir (VII) qu'il existe neuf coniques qui la touchent, tout en étant normales à A et B et tangentes à D et E. Mais d'après le résultat du huitième cas (tableau I), il existe quatorze coniques qui passent par le sommet du faisceau, et qui sont en même temps normales à A et B et tangentes à D et E. Donc, sur chacune des perpendiculaires à C, il existe vingt-trois points de contact, dont quatorze sont réunis en un seul au sommet du faisceau. Ainsi le lieu géométrique de ces points de contact est une courbe du vingt-troisième ordre, qui a au sommet du faisceau un point 14^{tuple}, et qui coupe la normale C en vingt-trois points, auxquels correspondent autant de coniques satisfaisant à la question.

IX. Quatorzième cas. — *On donne quatre normales* A, B, C, D *et une tangente* E. (Cinquante et une solutions.)

D'après le § VIII, il y a vingt-trois coniques normales à A, B, C, et tangentes à E ainsi qu'à chacune des droites du faisceau perpendiculaire à D ; on a donc vingt-trois points de contact sur chacune de ces droites. Mais, d'après le neuvième cas, ce sommet représente vingt-huit points de contact confondus en un seul. Donc le lieu des contacts est une courbe du cinquante et unième ordre douée, au sommet du faisceau, d'un point 28^{tuple}. Les cinquante et un points d'intersection de cette courbe par la normale D déterminent les cinquante et une coniques qui remplissent les conditions exigées.

X. Quinzième et dernier cas. — *On donne cinq normales* A, B, C, D, E. (Cent deux solutions.)

Normalement aux quatre droites A, B, C, D, on peut (IX) décrire cinquante et une coniques tangentes à chaque droite perpendiculaire à E. On a donc cinquante et un points de contact sur chacune d'elles. En outre, cinquante et un autres points de contact sont réunis en un seul au sommet du faisceau (tableau I, dixième cas). Donc le lieu géométrique des points de contact est une courbe du cent deuxième ordre, qui a, au sommet du faisceau, un point 51^{tuple}. Les cent deux points de rencontre de cette courbe avec la normale donnée E

déterminent, avec les autres données, les cent deux coniques cherchées.

XI. Au sujet des développements qui précèdent, je dois faire remarquer que non-seulement ils font connaître, dans chacun des cas proposés, le nombre des coniques qui satisfont à la question, mais encore qu'ils fournissent directement le moyen de les construire. La solution du problème est donc complète.

XII. J'ajoute encore qu'ils contiennent les énoncés et les démonstrations de plusieurs théorèmes très-généraux, et par eux-mêmes dignes d'intérêt, au sujet des lieux géométriques des points de contact d'un faisceau de droites et d'une série de coniques satisfaisant toutes à quatre mêmes conditions.

Ainsi le § II prouve incidemment que :

Le lieu des points de contact d'un faisceau de droites et d'un faisceau de coniques est une courbe du troisième ordre qui passe par le sommet du faisceau de droites.

Le § III prouve que :

Le lieu des points de contact d'un faisceau de droites et d'une série de coniques ayant en commun trois points et une tangente est une courbe du sixième ordre douée d'un point double au sommet du faisceau de droites.

Le tableau ci-après présente le résumé de ces divers théorèmes :

TABLEAU

Faisant connaître le degré des courbes, lieux des points de contact d'un faisceau de droites et d'une série de coniques satisfaisant toutes à quatre mêmes conditions, ainsi que l'ordre de multiplicité du point multiple dont chacune de ces courbes est douée au sommet du faisceau de droites.

N°s D'ORDRE des cas proposés.	DÉSIGNATION des quatre conditions communes à toutes les coniques d'une même série.			DEGRÉ de la courbe, lieu des contacts du faisceau de droites et de la série de coniques.	ORDRE du point multiple dont la courbe des contacts est douée au sommet du faisceau de droites.
	Points.	Tangentes.	Normales.		
1	4	»	»	3	1
2	3	1	»	6	2
3	3	»	1	9	3
4	2	2	»	8	4
5	2	1	1	14	6
6	2	»	2	23	9
7	1	3	»	6	4
8	1	2	1	14	8
9	1	1	2	28	14
10	1	»	3	51	23
11	»	4	»	3	2
12	»	3	1	9	6
13	»	2	2	23	14
14	»	1	3	51	28
15	»	»	4	102	51

XIII. Je terminerai par une dernière considération :

Des coniques décrites des mêmes foyers peuvent, comme on sait, être regardées comme ayant quatre tangentes (imaginaires) communes, et des coniques qui ont un seul foyer commun, comme ayant deux

tangentes (imaginaires) communes. D'après cela les résultats énoncés dans les deux tableaux précédents, sous les numéros d'ordre 4, 8, 11 et 13, conviennent aux coniques homofocales.

Par exemple (tableau II), *le lieu des points de contact d'une série de coniques biconfocales et d'un faisceau de droites, est une courbe du troisième ordre, qui a un point double au sommet du faisceau, etc.*

MÉMOIRE

SUR

LA POUSSÉE DES TERRES

AVEC OU SANS SURCHARGE;

PAR M. SAINT-GUILHEM,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

1. Dans un travail important, sur la *stabilité des revêtements*, publié dans le n° 13 du *Mémorial du Génie*, M. Poncelet a fait connaître des formules graphiques d'une élégance très-remarquable, pour déterminer la poussée exercée contre une paroi plane par un remblai sans surcharge, ou avec une surcharge constante, uniformément répartie par rapport à un plan horizontal. Ses formules sont applicables à un remblai prismatique quelconque à arêtes horizontales parallèles à la paroi, mais à la condition que l'on connaisse d'avance, ou que l'on ait déterminé par un tâtonnement préalable la face du remblai, qui est rencontrée par le plan de rupture. Elles ne s'appliquent pas, par conséquent, au cas où le profil du remblai est une courbe donnée.

Depuis la publication du travail de M. Poncelet, la question est restée stationnaire [*].

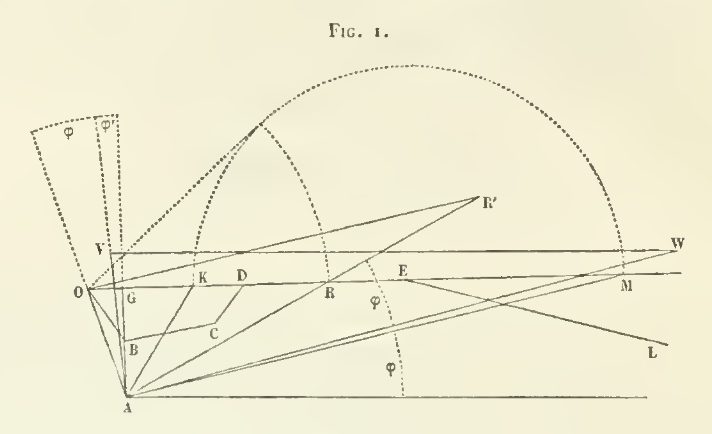
Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de déterminer directement le plan de rupture et la poussée d'un remblai dont le profil est un polygone ou une courbe quelconque, et qui est soumis à des pressions verticales variables dans son profil suivant une loi quelconque. Cette solution sera, comme on voit, beaucoup plus générale sous tous les rapports que celle de M. Poncelet.

[*] Le Mémoire de M. Poncelet a paru en 1840. Ceux qui se sont occupés depuis de la poussée des terres ont répété, en d'autres termes, ce qu'il a dit, ou sont restés en arrière.

Nous n'arriverons, il est vrai, à la solution que par des approximations successives; mais nous ferons voir que les calculs auxquels donnent lieu ces approximations, sont nécessaires pour trouver le centre de pression de la poussée.

Soit ABCDEL (*fig.* 1) un polygone représentant le profil du rem-

Fig. 1.



blai dont il s'agit, et AB le profil de la paroi. Nous supposerons que la surcharge est en profil une suite de points matériels placés sans liaison sur le profil BCDEL, et dont le poids varie suivant une loi quelconque. Nous allons chercher quelle sera la poussée que reçoit la paroi AB et le centre de pression sur cette paroi.

Nous admettrons que les terres qui forment le remblai n'ont aucune cohésion entre elles ni aucune adhérence avec la paroi [*]. Cette hypothèse tend à augmenter la poussée réelle, ce qui est sans inconvénient dans les applications.

Cela posé, considérons le massif de remblai comme tendant à se rompre et à s'ébouler suivant le plan AR, qui rencontre en R le côté DE du profil. Soient Q le poids du prisme d'éboulement, y compris celui de la surcharge correspondante à la portion BCDR du profil; R la résultante des réactions normales de la paroi et de celles dues au frottement qui tend à s'exercer contre ce plan; S la résultante des réactions normales du talus AR et de celles dues au frottement qui tend à s'exercer

[*] Dans un Mémoire inséré en 1843 dans ce Recueil, nous avons tenu compte de ces forces, mais dans le cas seulement d'un remblai sans surcharge.

également contre ce plan. Il est évident que les trois forces Q, R, S seront en équilibre et par conséquent se rencontreront en un même point.

Appelons φ et φ' les angles du frottement des terres sur elles-mêmes et sur la paroi, c'est-à-dire les angles sous lesquels les terres glissent sur elles-mêmes ou sur la paroi; les forces S et R tendant toutes deux à faire remonter le massif, il est facile de voir que la première sera normale à une droite AW, située à droite de AR, et faisant avec celle-ci un angle égal à φ; que la seconde sera normale à une droite AV, située à gauche de AB, et faisant avec celle-ci un angle égal à φ'; donc, si l'on mène une horizontale quelconque VW qui rencontre les droites AV, AW en V et W, les trois forces Q, R, S seront perpendiculaires aux trois côtés du triangle AVW [*], et par conséquent seront proportionnelles aux côtés auxquels elles sont perpendiculaires.

Si l'on fait tourner le triangle AVW dans son plan, de manière que AW vienne coïncider avec AR, le côté AV coïncidera avec une droite AO, qui fait avec AB un angle égal à $\varphi_1 = \varphi + \varphi'$; la droite VW deviendra parallèle au talus naturel des terres, puisqu'elle s'est inclinée sur l'horizon d'un angle égal à φ; donc, si l'on mène par le point O, où la droite OA vient rencontrer le côté DE prolongé, une droite OR', parallèle à une droite AM, qui représente le talus naturel des terres, le triangle AOR', formé par les trois droites AO, OR', AR', sera semblable au triangle AVW, et aura, par conséquent, ses côtés proportionnels aux trois forces R, Q, S; donc on aura

$$\frac{R}{Q} = \frac{AO}{OR'}.$$

Or si l'on appelle P la poussée exercée perpendiculairement contre la paroi AB, on aura évidemment

$$P = R\cos\varphi';$$

donc

$$P = Q\cos\varphi' \cdot \frac{AO}{OR'} = Q\cos\varphi' \frac{AO}{AM} \cdot \frac{AM}{OR'},$$

[*] La considération de ce triangle est due à M. Poncelet.

donc, à cause des triangles semblables ORR', ARM,

$$(1)\qquad P = Q\cos\varphi'\,\frac{AO}{AM}\cdot\frac{RM}{OR}.$$

Désignons par a, b, c les trois côtés OA, AM, MO du triangle AOM; par h la perpendiculaire abaissée du point A sur OM; par r_0, r les deux rayons vecteurs OD, OR comptés à partir du point O sur la ligne OM; par Σ_0, Σ la somme des surcharges de B en D, de B en R; par n^2 la surface du polygone ABCDOA; enfin, par σ la pression verticale au point R de la droite DE, rapportée à l'unité de longueur de cette droite, on aura, en considérant une longueur du remblai égale à l'unité, et en supposant la densité des terres égale à 1,

$$(2)\qquad \begin{cases} Q = \Sigma + \frac{1}{2}hr - n^2, \\ \Sigma = \Sigma_0 + \int_{r_0}^{r} \sigma\,dr, \\ RM = c - r. \end{cases}$$

Au moyen des notations admises et de ces relations, l'équation (1) devient

$$(3)\qquad P = \cos\varphi'\cdot\frac{a}{b}\left(\Sigma + \frac{1}{2}hr - n^2\right)\frac{c-r}{r}.$$

Cette poussée correspond à un plan de rupture quelconque; pour avoir la poussée maximum qui est, d'après Coulomb, celle qui se réalise dans la nature, il suffira d'égaler à o la dérivée de l'expression (3) par rapport à r, et d'en tirer la valeur de r. Si nous effectuons ce calcul, en observant que la dérivée de Σ est σ, il vient

$$(4)\qquad \left(\sigma + \frac{1}{2}h\right)(c-r)r - c\left(\Sigma + \frac{1}{2}hr - n^2\right) = 0,$$

ou, en réduisant,

$$(5)\qquad r^2\left(\sigma + \frac{1}{2}h\right) - \sigma c r + c(\Sigma - n^2) = 0.$$

Telle est l'équation générale d'où l'on déduira, en mettant pour σ et Σ

leurs valeurs, la position du plan de rupture correspondant à un point donné A de la paroi, lorsque l'on connaîtra le côté DE qui est rencontré par le plan de rupture.

Cherchons l'expression de la poussée pour un plan de rupture donné; à cet effet, mettons dans l'expression

$$(3) \qquad P = \cos\varphi' \cdot \frac{a}{b}\left(\Sigma + \frac{1}{2}hr - n^2\right)\frac{c-r}{r},$$

à la place de $\Sigma + \frac{1}{2}hr - n^2$, sa valeur tirée de l'équation (4), on aura

$$(6) \qquad P = \cos\varphi' \frac{a}{bc}\left(\sigma + \frac{1}{2}h\right)(c-r)^2,$$

qui est l'expression cherchée.

2. Avant d'aller plus loin, considérons quelques cas particuliers qui ont dans les applications une grande importance.

1°. S'il n'y a point de surcharge, on a

$$\sigma = 0, \qquad \Sigma = 0,$$

et la formule (5) devient

$$(7) \qquad r = \sqrt{\frac{n^2}{\frac{1}{2}h} \cdot c};$$

or si l'on prend, à partir du point O, sur la ligne OE, une longueur OK, telle que le triangle OAK soit équivalent au polygone OABCDO, on aura $OK = \frac{n^2}{\frac{1}{2}h}$, et, par conséquent, $r = \sqrt{OK \cdot c}$; donc r ou OR est moyen proportionnel entre OK et OM; donc il est très-facile, au moyen d'une construction géométrique très-simple indiquée sur la figure, d'obtenir dans ce cas le plan de rupture. Cette construction a été donnée par M. Poncelet.

2°. Si la surcharge est constante et uniformément répartie par rapport à l'horizontale, en désignant par ϖ la pression sur l'unité de lon-

gueur horizontale; par p la projection horizontale de la droite BO; par β l'angle que la ligne DE fait avec l'horizontale dirigée du côté des terres, on aura évidemment

$$\sigma = \varpi \cos\beta, \quad \Sigma = \varpi(r\cos\beta - p).$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (5) devient

$$r^2\left(\varpi\cos\beta + \frac{1}{2}h\right) - c(n^2 + \varpi p) = 0,$$

d'où

$$r = \sqrt{\frac{n^2 + \varpi p}{\varpi\cos\beta + \frac{1}{2}h} \cdot c}. \tag{8}$$

Dans le cas où le remblai est terminé par un plan qui aboutit au sommet de la paroi, si l'on désigne par u la distance OG, on aura $p = u\cos\beta$ et $n^2 = u\frac{1}{2}h$; alors l'équation (8) devient

$$r = \sqrt{u \cdot c}. \tag{9}$$

D'où l'on voit que le plan de rupture est le même que si la surcharge n'existait pas. L'équation (6) montre, d'ailleurs, que dans ce cas la poussée est augmentée dans le rapport de $\sigma + \frac{1}{2}h$ à $\frac{1}{2}h$.

3°. Si les surcharges sont distribuées d'une manière quelconque, depuis le point B jusqu'au point D, dont le rayon vecteur est r_0, mais d'une manière uniforme sur la droite DE, à partir du point D, on aura

$$\Sigma = \Sigma_0 + \sigma(r - r_0);$$

en substituant cette valeur dans l'équation (5), on a

$$r^2\left(\sigma + \frac{1}{2}h\right) - c(n^2 + \sigma r_0 - \Sigma_0) = 0,$$

d'où

$$r = \sqrt{\frac{n^2 + \sigma r_0 - \Sigma_0}{\sigma + \frac{1}{2}h} \cdot c}. \tag{10}$$

Les formules (6) et (10) feront connaître, sans difficulté, la position du plan de rupture et la poussée.

3. *Méthode générale.* — Pour qu'on puisse appliquer directement l'équation (5) à la recherche du plan de rupture, il faut, 1° que le remblai ait un profil polygonal ; 2° que l'on connaisse d'avance le côté du profil qui est rencontré par le plan de rupture ; 3° qu'après avoir substitué pour Σ et σ leurs valeurs en r, l'équation puisse se résoudre. Une considération bien simple, et qui néanmoins n'a pas été remarquée, permet d'éviter toutes ces difficultés.

Au lieu de chercher le plan de rupture qui correspond à un point A de la paroi, nous allons chercher quel est le point A de la paroi auquel correspond un plan de rupture qui passe par un point donné R du profil du remblai.

G étant le point où le côté DE prolongé vient rencontrer le prolongement de la paroi, faisons

$$\mathrm{OG} = u,\quad \mathrm{GM} = v,\quad \mathrm{GR} = w,\quad \mathrm{GA} = z,\quad \mathrm{AGM} = \theta,\quad \mathrm{GAM} = \lambda,$$
$$\mathrm{GAO} = \varphi_1,\quad \text{surface BGDC} = m^2.$$

On aura d'abord

$$(11)\qquad r = u + w,\quad c = u + v,\quad n^2 = \frac{1}{2} uz\sin\theta + m^2,\quad h = z\sin\theta.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (5) devient

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{1}{2}uvz\sin\theta - \sigma uv + uzw\sin\theta + \sigma uw - \sigma vw\\ &+\frac{1}{2}zw^2\sin\theta + (u+v)(\Sigma - m^2) + \sigma w^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Pour éliminer u et v, remarquons que dans les triangles OAG, GAM on a les relations

$$(13)\qquad u = \frac{\sin\varphi_1}{\sin(\theta - \varphi_1)}\cdot z,\quad v = \frac{\sin\lambda}{\sin(\lambda + \theta)}\cdot z,$$

que nous écrirons sous la forme abrégée

$$(14) \qquad u = kz, \quad v = lz.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (12) devient

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \tfrac{1}{2} klz^3 \sin\theta + (\sigma l - w \sin\theta) kz^2 \\ & - \left[\sigma w(k-l) + \tfrac{1}{2} w^2 \sin\theta + (k+l)(\Sigma - m^2)\right] z - \sigma w^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

qui est la relation cherchée; cette équation donnera directement la valeur de z, quand on connaîtra le point R, quels que soient le profil du remblai et la loi de variation de la surcharge, car connaissant le point R, on connaît θ, w, σ et Σ : ainsi, par la résolution d'une équation du troisième degré, on pourra déterminer rigoureusement, sans aucun tâtonnement, le plan de rupture correspondant à tel point du profil que l'on voudra.

Connaissant z, pour calculer la valeur de P, on observera qu'on a

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\lambda + \theta)}{\sin(\theta - \varphi_1)}, \quad c = u + v = \frac{\sin\theta \sin(\lambda + \varphi_1)}{\sin(\lambda + \theta)\sin(\theta - \varphi_1)} z, \quad v = lz.$$

on en déduira

$$(16) \qquad P = \cos\varphi' \frac{\sin^2(\lambda + \theta)}{\sin\theta \sin(\lambda + \varphi_1)} \cdot \frac{\left(\sigma + \frac{1}{2} z \sin\theta\right)(lz - w)^2}{z}.$$

Telle est l'expression la plus générale de la poussée pour un profil polygonal quelconque du remblai, et pour une surcharge soumise à une loi de variation quelconque.

Remarque I. — Les côtés du polygone peuvent être aussi petits que l'on voudra, par conséquent le profil du remblai peut être une courbe quelconque; w est alors la portion de la tangente à cette courbe, comprise entre le point donné sur le profil et la paroi.

Remarque II. — Si la surcharge est nulle, on aura $\Sigma = 0$, $\sigma = 0$.

et l'équation (15) se réduira à l'équation du second degré

$$(17)\qquad z^2 - \frac{2w}{l}z + \frac{2(k+l)m^2 - w^2\sin\theta}{kl\sin\theta} = 0;\ [*]$$

d'où l'on déduira

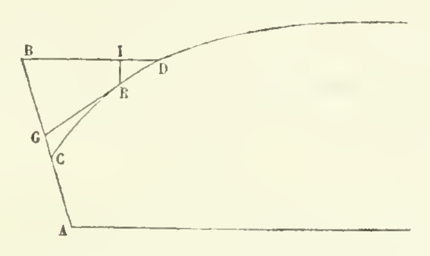
$$(18)\qquad z = \frac{w}{l} + \sqrt{\frac{k+l}{kl}\left(\frac{w^2}{l} - \frac{2m^2}{\sin\theta}\right)}.$$

On a pris le radical avec le signe +, parce qu'on a toujours

$$v > w \quad \text{ou} \quad lz > w, \quad \text{d'où} \quad z > \frac{w}{l}.$$

Remarque III. — Si la surcharge est un liquide homogène dont la densité est ρ, en désignant par y l'ordonnée du point R (*fig.* 2) par

Fig. 2.



rapport à la surface du liquide, par β l'angle que la tangente GR au même point fait avec l'horizontale, on aura

$$\beta = \lambda + \varphi + \theta - 180^\circ, \quad \sigma = \rho y \cos\beta;$$

si la paroi est verticale, on aura

$$\lambda + \varphi = 90^\circ, \quad \sigma = \rho y \sin\theta.$$

---

[*] Cette équation se déduit facilement de l'équation (7), en faisant dans celle-ci

$$r = u + w, \quad n^2 = m^2 + \frac{1}{2}uh, \quad h = z\sin\theta, \quad c = u + v.$$

Si l'on pose $\frac{2m^2}{h} = t$, l'équation (7) se met sous la forme

$$(u+w)^2 = (u+t)(u+v).$$

Cette formule résout tous les problèmes de la poussée des terres sans surcharges.

On trouvera d'ailleurs aisément, si $\varphi' = 0$, les relations suivantes :

$$l = \frac{\cos\varphi}{\cos(\theta - \varphi)}, \quad \frac{1}{kl} = \frac{\sin 2(\theta - \varphi)}{\sin 2\varphi},$$

$$\frac{k - l}{kl} = -\frac{2\sin(\theta - 2\varphi)}{\sin 2\varphi}, \quad \frac{k + l}{kl\sin\theta} = \frac{2}{\sin 2\varphi}.$$

Détermination du centre de pression de la poussée. — La distance du centre de pression sur le parement AB au point B (*fig.* 1) est égale au moment de la poussée par rapport à ce point, divisé par l'intensité de la poussée ; on sait trouver la poussée : il reste à trouver son moment par rapport au point B.

Or, la poussée sur le parement BA étant P, la poussée sur un petit élément du parement BA au point A sera dP, et son moment par rapport au point B sera $z\,dP$. Donc le moment de la poussée sur une portion quelconque du parement comptée à partir du point B, par rapport au point B, sera $\int_0^P z\,dP$. Donc ce moment sera représenté géométriquement par l'aire d'une courbe dont l'abscisse est P et l'ordonnée z.

Pour calculer cette aire, lorsque P est une fonction compliquée de z, on devra, dans la pratique, calculer les poussées correspondantes à divers points du parement ou à divers points du profil suffisamment rapprochés ; construire, d'après ces données, la courbe dont P est l'abscisse et z l'ordonnée, et déduire de cette construction par les méthodes connues l'aire de la courbe.

On voit par là que, pour calculer le centre de pression, il est nécessaire de connaître les poussées correspondantes à divers points du parement ou du profil peu éloignés les uns des autres ; que, par suite, les calculs par lesquels on passe pour arriver à la poussée que supporte la paroi, servent tous pour la détermination du centre de pression, ainsi que nous l'avons dit au commencement de ce Mémoire.

Remarque. — Dans le cas particulier où la surface du remblai est un plan aboutissant à l'arête supérieure de la paroi et où la surcharge est uniformément répartie sur ce plan, les quantités u et c sont proportionnelles à z ; il en est de même en vertu de la formule (9) de r ou

$u + w$, et, par conséquent, de w; donc la formule (16) peut se mettre sous la forme

$$P = A\left(\sigma + \frac{1}{2} z \sin\theta\right) z,$$

A étant une constante; le moment de la poussée par rapport au point B sera, conséquemment,

$$\int_0^z A(\sigma + z\sin\theta)\, z dz = A z^2 \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{z\sin\theta}{3}\right),$$

et la distance du centre de pression au point B sera

$$\frac{z\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{z\sin\theta}{3}\right)}{\sigma + \frac{1}{2} z\sin\theta} = \frac{3\sigma + 2z\sin\theta}{6\sigma + 3z\sin\theta} \cdot z,$$

laquelle, lorsque $\sigma = 0$, devient $\frac{2}{3} z$, expression connue.

NOTE I.

Des formules les plus usuelles.

Les formules les plus usuelles sont relatives à une surcharge constante; dans cette hypothèse, nous considérerons deux cas particuliers: 1° celui où le remblai est arasé au niveau de la paroi; 2° celui où la surface supérieure du remblai est un plan aboutissant à l'arête supérieure de la paroi : nous avons vu que, dans ces deux cas, le plan de rupture est le même que s'il n'y avait pas de surcharge.

Nous admettrons que le frottement sur le parement du mur est négligeable, c'est-à-dire qu'on a $\varphi' = 0$ [*].

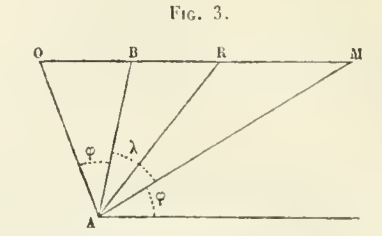
---

[*] M. Audé, lieutenant-colonel du Génie, a fait sur la poussée des terres une suite d'expériences très-remarquables, qui ont été publiées au n° 15 du *Mémorial du Génie*. Nous avons comparé, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, les résultats de ces expériences avec ceux que donne la théorie en faisant toujours $\varphi' = 0$; nous avons trouvé entre les uns et les autres un accord des plus satisfaisants.

Premier cas. — *Où le remblai est arasé au niveau de l'arête supérieure de la paroi.*

Soient AB (*fig.* 3) la paroi dont il s'agit; BM la surface horizontale du

Fig. 3.



remblai arasée au niveau du point B; AM le talus naturel des terres faisant un angle égal à φ avec l'horizon et un angle égal à λ avec AB; AO une droite faisant avec AB, du côté opposé aux terres, un angle égal à φ; AR le plan de rupture, en sorte qu'on a $\mathrm{OR} = \sqrt{\mathrm{OB}\,.\,\mathrm{OM}}$.

Si l'on fait passer un cercle par les trois points A, B, M, la droite OA sera tangente à ce cercle en A, puisque l'on a $\mathrm{AMB} = \mathrm{OAB}$; donc on aura $\mathrm{OA} = \sqrt{\mathrm{OB}\,.\,\mathrm{OM}} = \mathrm{OR}$; donc le triangle OAR est isocèle, et, pour déterminer le point R, il suffira tout simplement de prendre $\mathrm{OR} = \mathrm{OA}$.

On peut le déterminer autrement : on a

$$\mathrm{OAR} + \mathrm{ARO} = \mathrm{OAM} + \mathrm{AMO} = \lambda + 2\varphi;$$

donc

$$\mathrm{OAR} = \frac{\lambda}{2} + \varphi, \quad \text{donc} \quad \mathrm{BAR} = \frac{\lambda}{2};$$

donc la droite AR divise l'angle BAM en deux parties égales. De là ce théorème dû à Français : *Le plan de rupture divise l'angle que forme la paroi avec le talus naturel des terres en deux parties égales.*

Cela posé, faisons, comme dans notre Mémoire,

$$\mathrm{AB} = z, \quad \mathrm{BM} = v, \quad \mathrm{BR} = w.$$

Les triangles BAR, MAR (*fig.* 3) donnent les relations

$$\frac{\mathrm{AR}}{z} = \frac{\sin(\lambda+\varphi)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2}+\varphi\right)}, \quad \frac{v-w}{\mathrm{AR}} = \frac{\sin\frac{\lambda}{2}}{\sin\varphi}.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$v - w = z\,\frac{\sin\frac{\lambda}{2}}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\lambda + \varphi}{\sin\left(\frac{\lambda}{2} + \varphi\right)}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (16) à la place de $lz - w$, et observant que l'on a $\varphi' = 0$, $\sin(\lambda + \theta) = \sin\varphi$, $\sin\theta = \sin(\lambda + \varphi)$, il vient

$$P = \left[\frac{\sin\frac{\lambda}{2}}{\sin\left(\frac{\lambda}{2} + \varphi\right)}\right]^2 \left[\sigma + \frac{1}{2} z \sin(\lambda + \varphi)\right] z.$$

Telle est l'expression de la poussée.

Second cas. — *Où la surface supérieure du remblai est un plan incliné aboutissant à l'arête supérieure de la paroi.*

Faisons (*fig.* 3)

$AB = z$, $OB = u$, $BM = v$, $BR = w$, $OAB = \varphi$, $BAM = \lambda$, $ABM = \theta$.

On a toujours, en vertu de la formule (9),

$$(u + w)^2 = u(u + v),$$

d'où

$$\frac{u + w}{u} = \sqrt{\frac{u + v}{u}}.$$

Or on a

$$\frac{u + v}{OA} = \frac{\sin(\lambda + \varphi)}{\sin(\lambda + \theta)}, \quad \frac{OA}{u} = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}.$$

Donc, en multipliant ces équations terme à terme,

$$\frac{u + v}{u} = \frac{\sin(\lambda + \varphi).\sin\theta}{\sin\varphi.\sin(\lambda + \theta)}.$$

On a d'ailleurs

$$u = \frac{\sin\varphi}{\sin(\theta - \varphi)}\,z;$$

donc

$$u + w = z\sqrt{\frac{\sin(\lambda+\varphi)\sin\theta\sin\varphi}{\sin^2(\theta-\varphi)\sin(\lambda+\theta)}},$$

$$u + v = z\frac{\sin\theta.\sin(\lambda+\varphi)}{\sin(\lambda+\theta)\sin(\theta-\varphi)}.$$

Si l'on pose

$$R = \sqrt{\frac{\sin(\lambda+\theta)\sin\varphi}{\sin(\lambda+\varphi)\sin\theta}},$$

on aura

$$v - w = z\frac{\sin\theta\sin(\lambda+\varphi)}{\sin(\lambda+\theta)\sin(\theta-\varphi)}\cdot(1-R);$$

la formule (16) deviendra, au moyen de celle-ci,

$$P = \frac{\sin\theta\sin(\lambda+\varphi)}{\sin^2(\theta-\varphi)}(1-R)^2\left(\sigma + \frac{1}{2}z\sin\theta\right)z.$$

Telle est la formule la plus générale pour le cas que nous considérons.

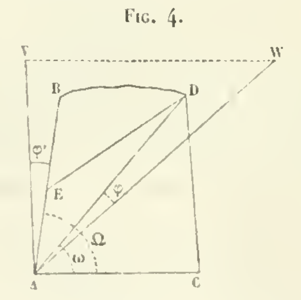
Dans les deux cas que nous venons d'examiner, le centre de pression est au tiers de la longueur de la paroi, à partir du bas.

NOTE II.

Détermination de la poussée d'un remblai prismatique compris entre deux parois planes.

Soient AB, CD (*fig.* 4) les deux parois entre lesquelles est compris

Fig. 4.



un remblai de terre; on demande la poussée de ce remblai sur la paroi AB, par exemple.

On déterminera le point E où le plan de rupture correspondant au point D vient rencontrer BA.

Il pourra arriver que le point E soit au-dessous ou au-dessus du point A.

S'il est au-dessous, la poussée sera celle qui correspond à un remblai d'une largeur indéfinie.

S'il est au-dessus, le maximum de la poussée sur BA correspondra au plan de rupture DA. Si l'on appelle alors ω et Ω les angles que les plans AD et AB font avec le plan horizontal AC, Q la surface BAD, φ le frottement des terres sur elles-mêmes, φ' le frottement des terres sur BA, on aura, en raisonnant comme dans l'article Ier du Mémoire,

$$\frac{P}{\cos\varphi'} = \frac{Q.AV}{VW} = \frac{Q \sin(\omega - \varphi)}{\sin(\Omega - \omega + \varphi + \varphi')},$$

ou

$$P = Q\frac{\sin(\omega - \varphi)\cos\varphi'}{\sin(\Omega - \omega + \varphi + \varphi')}.$$

Telle est la poussée que supporte le plan AB.

Pour déterminer le centre de pression, on déterminera la poussée correspondante à un nombre de points suffisant du parement AB, ou plutôt de la surface BD.

Puis on opérera comme il a été dit dans le Mémoire.

Observation. — Rien ne démontre que les plans de rupture correspondants aux divers points du parement situés au-dessous du point E, passent tous par le point D; mais cette hypothèse s'accorde d'une manière remarquable avec les expériences de M. Audé, et elle a l'avantage de donner lieu à des calculs très-simples.

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE;

Par M. BESGE.

L'intégration de l'équation

$$(1) \qquad (ax + by + c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0,$$

où a, b, c, a', b', c' sont des constantes, s'effectue facilement et fournit un bon exemple qu'on cite dans tous les traités. Une transformation très-simple rend en effet l'équation (1) homogène ou y sépare les variables.

On ferait bien, ce me semble, d'observer que des calculs semblables s'appliquent à l'équation

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right),$$

quelle que soit la fonction donnée f.

Je serais même porté à ajouter d'autres équations faciles à ramener à l'équation (2); par exemple celle-ci :

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} f\left(\frac{ay + bx + cxy}{a'y + b'x + c'xy}\right),$$

où il suffit de changer x en $\frac{1}{x}$ et y en $\frac{1}{y}$.

Ce que l'on dit et ce que l'on sait sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre est si peu de chose, qu'aucun détail ne peut paraître insignifiant aux élèves.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

HUITIÈME ARTICLE.

Dans cet article, je conserve pour le nombre entier m dont je m'occupe, et qui peut être indifféremment pair ou impair, le mode de partition que nous avons mis en œuvre dans l'article précédent (cahier de janvier, page 1). Il faut considérer toutes les solutions de l'équation

$$m = m'^2 + m'',$$

où l'on prend pour m' un entier positif ou négatif, ou même zéro, tandis que m'' est essentiellement positif. Pour chaque groupe m', m'' ainsi obtenu, on décomposera m'' de toutes les manières possibles en un produit

$$2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

où d'' et δ'' sont des entiers positifs impairs, et où l'exposant α'' se réduit à zéro quand m'' est impair. Nous prenons donc pour point de départ l'équation

$$m = m'^2 + m'' = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta''.$$

Cela posé, soit

$$\mathfrak{F}(x, y)$$

une fonction paire par rapport à y, mais impaire par rapport à x et s'évanouissant avec cette variable, ou plutôt, soit $\mathfrak{F}(x, y)$ une fonction telle, que l'on ait, pour les valeurs de x, y dont on fera usage,

$$\mathfrak{F}(x, -y) = \mathfrak{F}(x, y), \quad \mathfrak{F}(-x, y) = -\mathfrak{F}(x, y), \quad \mathfrak{F}(0, y) = 0.$$

Faisons la somme des expressions de la forme

$$(-1)^{m''-1}\mathfrak{F}(2^{\alpha''}d''+m',\ \delta''-2m'),$$

pour toutes les valeurs de $2^{\alpha''}d''$ et δ'' dont le produit est m'', puis sommons de nouveau le résultat pour tous les groupes m', m'' dont il a été question plus haut, et qui donnent $m=m'^2+m''$. Cette somme double,

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\mathfrak{F}(2^{\alpha''}d''+m',\ \delta''-2m'),$$

sera généralement égale à zéro. Mais il y a exception quand m est un carré, et alors la somme double est égale à

$$\mathfrak{F}(\sqrt{m},1)+\mathfrak{F}(\sqrt{m},3)+\mathfrak{F}(\sqrt{m},5)+\ldots+\mathfrak{F}(\sqrt{m},2\sqrt{m}-1).$$

En d'autres termes, on a

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum\sum(-1)^{m''-1}\mathfrak{F}(2^{\alpha''}d''+m',\ \delta''-2m')=0,\quad \text{ou}\\ &=\mathfrak{F}(\sqrt{m},1)+\mathfrak{F}(\sqrt{m},3)+\mathfrak{F}(\sqrt{m},5)+\ldots+\mathfrak{F}(\sqrt{m},2\sqrt{m}-1),\end{aligned}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré.

Observons, en passant, que les valeurs de y qui figurent ici dans $\mathfrak{F}(x,y)$ sont toujours impaires : quant aux valeurs de x, elles sont paires ou impaires, suivant que m est pair ou impair.

Prenons $m=3$. Les valeurs de m' et de m'' (ou $2^{\alpha''}d''\delta''$), pour lesquelles on a

$$m=m'^2+m'',$$

seront

$$m'=0,\quad m''=1.3=3.1;\quad m'=1,\quad m''=2.1;\quad m'=-1,\quad m''=2.1$$

De là, pour notre somme double,

$$\mathfrak{F}(1,3)+\mathfrak{F}(3,1)-\mathfrak{F}(3,-1)-\mathfrak{F}(1,3);$$

et comme $\mathfrak{F}(3,-1)=\mathfrak{F}(3,1)$, on trouve bien zéro pour résultat.

Mais si $m = 1$, on n'a que cette décomposition $1 = 0^2 + 1$, et notre somme se réduit à un seul terme $\mathcal{F}(1, 1)$. Cela s'accorde avec la formule (γ), parce que 1 est un carré.

Pour $m = 4$, on doit trouver

$$\mathcal{F}(2, 1) + \mathcal{F}(2, 3);$$

et cela résulte en effet des décompositions de m, qui répondent à

$$m' = 0,\quad m'' = 4.1;\quad m' = 1,\quad m'' = 3.1 = 1.3;\quad m' = -1,\quad m'' = 3.1 = 1.3$$

Cela donne la somme

$$-\mathcal{F}(4, 1) + \mathcal{F}(4, -1) + \mathcal{F}(2, 1) + \mathcal{F}(2, 3) + \mathcal{F}(0, 5);$$

il suffit à présent d'observer que $\mathcal{F}(4, -1) = \mathcal{F}(4, 1)$ et $\mathcal{F}(0, 5) = 0$.

Pour appliquer la formule (γ) à un exemple étendu et important, posons

$$\mathcal{F}(x, y) = \sin(xt)\cos(yz),$$

t et z désignant des constantes quelconques. Nous aurons

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\sin(2^{\alpha''}d'' + m')\,t\cos(\delta'' - 2m')\,z = 0$$

quand m n'est pas un carré, cette même somme étant au contraire égale à

$$\left[\cos z + \cos 3z + \cos 5z + \ldots + \cos(2\sqrt{m} - 1)\,z\right]\sin(t\sqrt{m}),$$

quand m est un carré.

Dans le cas très-particulier de

$$z = 0,\quad t = \frac{\pi}{2},$$

il vient

$$\sum(-1)^{m''-1}\sin(2^{\alpha''}d'' + m')\frac{\pi}{2} = 0,\ \text{ou}\ = \sqrt{m}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{m}\right),$$

suivant que m n'est pas ou est un carré, ce qui ne donne pour un nombre pair qu'une identité insignifiante, mais au contraire une équation assez curieuse quand m est impair et de la forme $8\nu + 1$. Sup-

posons donc désormais m impair. On a

$$\sin(2^{\alpha''}d''+m')\frac{\pi}{2}=\sin\left(2^{\alpha''}d''\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(m'\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(2^{\alpha''}d''\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\frac{\pi}{2}\right):$$

et le dernier terme ne produit rien dans notre somme double, où les valeurs de m' qui ne sont pas nulles sont deux à deux égales et de signes contraires. Quant au premier terme, il est nul quand m' est impair, à cause du facteur $\cos\left(m'\frac{\pi}{2}\right)$: nous devrons donc nous borner à prendre

$$m'=0,\quad m'=\pm 2,\quad m'=\pm 4,\ldots,\quad m'=\pm 2\mu,$$

2μ étant la racine du plus grand carré pair inférieur à m. L'équation

$$m=m'^2+m''=m'^2+2^{\alpha''}d''\delta''$$

nous montre que pour ces valeurs de m', m'' est impair, comme m, en sorte que l'on a

$$\alpha''=0,\quad m''=d''\delta'',\quad \sin\left(2^{\alpha''}d''\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{\frac{d''-1}{2}}.$$

Si donc nous posons, d'après une notation qui nous est familière,

$$\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}=\rho(m'')=\rho(m-m'^2),$$

et si nous observons que l'on a toujours ici

$$(-1)^{m''-1}=1$$

tandis que

$$\cos\left(m'\frac{\pi}{2}\right)=\pm 1$$

alternativement, nous obtiendrons ce résultat final :

$$\rho(m)-2\rho(m-4)+2\rho(m-16)-\ldots\pm\rho(m-4\mu^2)=0,\ \text{ou}\ =(-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}}\sqrt{m},$$

suivant que m n'est pas ou est un carré. Ceci peut conduire à des résultats intéressants sur la décomposition d'un nombre impair $8\nu+1$ en trois carrés.

Revenons à la formule générale (γ). Comme la fonction $\mathfrak{F}(x, y)$ est impaire par rapport à x et doit s'évanouir avec x, tandis qu'elle est paire par rapport à y, il nous est permis de prendre

$$\mathfrak{F}(x, y) = x f(x, y),$$

la fonction $f(x, y)$ étant paire par rapport aux deux variables. Nous aurons ainsi cette formule nouvelle

$$(\delta)\left\{\begin{array}{l}\sum\sum(-1)^{m''-1}(2^{\alpha''}d''+m')f(2^{\alpha''}d''+m',\ \delta''-2m') = 0, \text{ ou} \\ = \sqrt{m}(f(\sqrt{m}, 1)+f(\sqrt{m}, 3)+f(\sqrt{m}, 5)+\ldots+f(\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-1),\end{array}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré.

Mais on a une formule plus intéressante encore, en observant que $\delta''-2m'$ ou y étant un nombre essentiellement impair, on remplira les conditions imposées à $\mathfrak{F}(x, y)$ en prenant

$$\mathfrak{F}(x, y) = (-1)^{\frac{y}{2}}\mathrm{F}(x, y),$$

pourvu que l'on suppose

$$\mathrm{F}(-x, y) = \mathrm{F}(x, -y) = -\mathrm{F}(x, y),$$
$$\mathrm{F}(0, y) = 0, \quad \mathrm{F}(x, 0) = 0,$$

en sorte que $\mathrm{F}(x, y)$ soit une fonction impaire, et par rapport à x et par rapport à y. Alors le facteur

$$(-1)^{m''-1}$$

qu'on avait déjà devra être groupé avec

$$(-1)^{\frac{\delta''-2m'}{2}},$$

ce qui donne pour produit

$$(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}+m''-m'-\frac{1}{2}}.$$

D'après l'équation

$$m = m'^2 + m'',$$

on a évidemment

$$(-1)^{m''-m'} = (-1)^{m}.$$

Si donc on multiplie les deux membres de l'équation (γ) par

$$(-1)^{m+\frac{1}{2}},$$

on voit que, par cette multiplication et notre transformation réunies, le premier membre de l'équation (γ) devient

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} F(2^{\alpha''}d'' + m', \delta'' - 2m').$$

Quant au second membre, il est généralement égal à zéro : il n'y a exception que quand m est un carré, et alors on en trouve aisément la valeur, savoir

$$(-1)^{m+1}\left[F(\sqrt{m}, 1) - F(\sqrt{m}, 3) + F(\sqrt{m}, 5) - \ldots \pm F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1)\right],$$

où les signes sont successivement $+$ et $-$, sous la parenthèse.

Ainsi on a la formule

$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} \sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} F(2^{\alpha''}d'' + m', \delta'' - 2m') = 0, \text{ ou} \\ = (-1)^{m+1}\left[F(\sqrt{m}, 1) - F(\sqrt{m}, 3) + F(\sqrt{m}, 5) - \ldots \pm F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1)\right], \end{cases}$$

suivant que m n'est pas ou est un carré. Nous la faisons résulter de la formule (γ), mais à son tour elle pourrait donner celle-là ; ou plutôt les formules (γ), (δ) et (ε) sont toutes les trois fournies à la fois par un même calcul reposant sur les considérations les plus simples.

Nous aurons à faire plus tard un grand usage de la formule (ε). En y prenant

$$F(x, y) = xy,$$

on est conduit à une équation curieuse, qui pourrait servir à trouver, si déjà on ne le connaissait par d'autres moyens, le nombre des décompositions d'un entier m en une somme de deux carrés. Mais cela mérite d'être développé à part et longuement, sinon pour le théorème

dont nous parlons pris en lui-même, du moins au point de vue de la méthode qui semble devoir être très-féconde.

En désignant par t et z deux constantes quelconques, on peut prendre encore

$$F(x, y) = \sin(xt)\sin(yz).$$

On obtiendra ainsi la valeur de la somme double

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \sin(2^{\alpha''}d'' + m')\, t \sin(\delta'' - 2m')\, z.$$

En développant les sinus, on trouve pour leur produit quatre termes, dont deux, savoir

$$\cos(2^{\alpha''}d''t)\sin(m't)\sin(\delta''z)\cos(2m'z)$$

et

$$\sin(2^{\alpha''}d''t)\cos(m't)\cos(\delta''z)\sin(2m'z),$$

qui changent de signe sans changer de valeur en même temps que m', peuvent être omis. En tenant donc compte seulement des deux autres, on substituera à la somme double indiquée la différence de ces deux autres sommes

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \sin(2^{\alpha''}d''t)\sin(\delta''z)\cos(m't)\cos(2m'z)$$

et

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \cos(2^{\alpha''}d''t)\cos(\delta''z)\sin(m't)\sin(2m'z).$$

Cette différence est nulle quand m n'est pas un carré; et, dans le cas contraire, elle est égale à

$$(-1)^{m+1}\left[\sin z - \sin 3z + \sin 5z - \ldots \pm \sin(2\sqrt{m} - 1)\, z\right]\sin(t\sqrt{m}).$$

Nous devons, en terminant, faire observer que la formule (β) de notre septième article est comprise comme cas particulier dans la formule (γ) de l'article actuel. On remplira en effet les conditions im-

posées à la fonction $\mathfrak{F}(x, y)$, que la formule (γ) contient, en la réduisant à une fonction $F(x)$ de x seulement, pourvu que l'on ait

$$F(0) = 0$$

et

$$F(-x) = -F(x).$$

Cela étant, la formule (γ) nous donne

$$\sum\sum(-1)^{m''-1} F(2^{\alpha''}d'' + m') = \sqrt{m}\, F(\sqrt{m}), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré : c'est précisément notre ancienne formule (β).

SOLUTION

DE

DEUX PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Les deux questions que je me propose de résoudre sont comprises dans l'énoncé suivant :

*Déterminer l'*ESPÈCE *de la surface du second ordre qui passe par neuf points ou qui touche neuf plans donnés.*

Je vais les examiner successivement.

§ I. — *Neuf points de la surface sont donnés.*

I. Le problème proposé est celui-ci :

Déterminer l'espèce de la surface du second ordre qui passe par les neuf points.

Il suffit de chercher si la courbe d'intersection de la surface par le plan situé à l'infini est réelle ou imaginaire. Dans le premier cas, la surface est un hyperboloïde; dans le second cas, c'est un ellipsoïde. Enfin, si la courbe se réduit à un point, le plan à l'infini est un plan tangent, et la surface est un paraboloïde. Quand la surface s'étend à l'infini, il reste encore à déterminer si elle est réglée ou non.

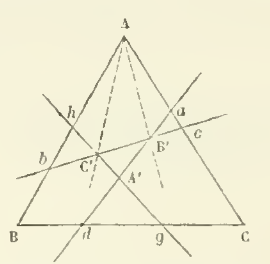
La solution que je vais développer consiste à mener, par un des points donnés, six arêtes d'un cône du second degré ayant pour base la courbe d'intersection de la surface par le plan à l'infini, et à chercher si ce cône est réel ou imaginaire.

II. Pour éviter des répétitions inutiles, je suppose ici qu'on sache résoudre la question suivante, dont le lecteur trouvera la solution dans les § IV et V d'une Note que j'ai insérée au tome III du *Journal de Mathémathiques* (1858), savoir : *Étant donnés neuf points d'une sur-*

face du second degré et une droite, trouver les points de rencontre de cette droite et de la surface.

III. Lemme. — *Connaissant les six points d'intersection imaginaires d'une conique et d'un triangle tracé dans son plan, on peut déterminer si la conique, à laquelle ces six points appartiennent, est réelle ou imaginaire, et, dans le cas où elle est réelle, on peut la construire.*

Les points d'intersection, conjugués deux à deux, sont donnés, sur chacun des côtés du triangle ABC, par leurs *éléments* réels, c'est-à-dire par leurs points milieux et par les rectangles de leurs distances à des



points fixes pris sur ces côtés, respectivement: par exemple, aux sommets du triangle. Designant ces couples de points par γ, γ' sur AB, par α, α' sur BC, et par β, β' sur AC, on aura, entre les éléments réels qui les représentent, la relation suivante, due à Carnot, qui exprime qu'ils sont tous sur une même conique, savoir :

$$\frac{A\gamma.A\gamma'}{B\gamma\ B\gamma'}\cdot\frac{B\alpha.B\alpha'}{C\alpha.C\alpha'}\cdot\frac{C\beta.C\beta'}{A\beta.A\beta'} = +1 \quad (\textit{Géom. sup.}, 476).$$

Le point A est, par hypothèse [*], extérieur à la conique. Donc, si la conique n'est pas imaginaire, ses tangentes issues du point A sont réelles. Il s'agit de les déterminer.

Pour cela on cherchera, sur les côtés AB, AC, les points b, c conjugués harmoniques du point A par rapport aux segments imaginaires $\gamma\gamma'$, $\beta\beta'$. Ces points seront toujours réels (*Géom. sup.*, n° 92).

---

[*] En effet, on suppose que la conique n'est pas rencontrée par les côtes du triangle; elle ne peut donc, si elle est réelle, qu'être intérieure à ce triangle.

La droite bc sera la *polaire* du point A par rapport à la conique cherchée. On construira de même la polaire gh du point B, et la polaire ad du point C. Ces trois polaires se coupent en trois points A', B', C', qui sont, respectivement, les *pôles* des côtés BC, CA, AB. Si l'on joint le point A aux deux pôles C' et B', les droites AB et AC' seront *conjuguées* par rapport à la conique; car le pôle de l'une se trouve sur l'autre (*Géom. sup.*, n° **687**). Les droites AC, AB' seront également deux droites conjuguées, et les rayons doubles de l'involution déterminée par les deux angles BAC', CAB', seront les tangentes à la conique issues du point A (*Géom. sup.*, n° **690**). Si ces tangentes sont réelles, la conique sera réelle, mais elle sera imaginaire, si ces tangentes sont imaginaires, et l'une ou l'autre de ces circonstances sera immédiatement indiquée par la figure; car, dans le premier cas, les angles BAC', CAB' seront complétement intérieur ou extérieur l'un à l'autre; et, dans le second cas, ils empiéteront au contraire l'un sur l'autre. Si la conique est réelle, on déterminera, comme on vient de le dire, ses quatre autres tangentes issues des sommets B et C, ce qui permettra de la construire, soit par enveloppes, soit par points. Ainsi, la question est résolue.

IV. Cela posé, soient a, b, c, d quatre quelconques des neuf points donnés de la surface du second degré.

Dans le plan abc, on mène, par le point a, deux droites arbitraires ai, aj, dont on détermine les points d'intersection i et j avec la surface (II). La conique, suivant laquelle le plan abc coupe la surface, est déterminée par les cinq points a, b, c, i, j; il faut trouver ses points, réels ou imaginaires, situés à l'infini. Pour cela, on mène les droites ac, ai, aj; puis les droites ac', ai', aj' parallèles à bc, bi, bj, respectivement. Les rayons doubles des deux faisceaux homographiques déterminés par ces deux systèmes de trois droites, sont parallèles aux asymptotes de la conique (*Géom. sup.*, n° **646**). Si ces rayons doubles sont réels ou coïncidents, il est inutile d'aller plus loin. La courbe, et par conséquent la surface elle-même, ayant à l'infini deux points réels, distincts ou réunis en un seul, celle-ci est un hyperboloïde ou un paraboloïde. Mais si les rayons doubles sont imaginaires, on n'en peut encore tirer aucune conclusion, parce qu'une surface du

second ordre qui s'étend à l'infini, peut, aussi bien qu'une surface limitée, être coupée par un plan suivant une courbe fermée. Il faut donc, dans ce cas, procéder à une recherche plus approfondie.

V. Afin d'éviter l'emploi des formules trigonométriques, on coupera le plan abc, suivant une droite AB, par un plan arbitraire M, et l'on cherchera, sur AB, les deux points imaginaires $\gamma\gamma'$, suivant lesquels cette droite est coupée par les deux rayons doubles imaginaires dont il vient d'être question [*].

On fera la même série de constructions dans le plan abd, et l'on obtiendra, sur la droite BC suivant laquelle ce plan est coupé par le plan transversal M, deux points α, α' (que je suppose encore imaginaires) [**], qui sont les points de rencontre de BC par les droites $a\alpha$, $a\alpha'$, menées, du point a, parallèlement aux asymptotes imaginaires de la conique d'intersection de la surface par le plan abd.

Enfin, dans le plan acd, coupé par le plan M suivant la droite CA, on trouvera de même, sur cette droite, deux points imaginaires β, β' [**], déterminés par les droites $a\beta$, $a\beta'$, menées, du point a, parallèlement aux asymptotes de la conique d'intersection de la surface par ce plan acd.

VI. Par cette série de constructions, dont chacune n'exige l'emploi que de la règle et du compas, on a déterminé six arêtes imaginaires, savoir : $a\gamma$, $a\gamma'$, $a\alpha$, $a\alpha'$, $a\beta$, $a\beta'$, appartenant à un cône du second degré, qui a son sommet au point a, et qui a pour base la courbe d'intersection de la surface par le plan situé à l'infini. Il ne s'agit plus que de savoir si ce cône est réel, et, pour cela, il suffit de savoir si la courbe, suivant laquelle il est coupé par le plan M, est elle-même réelle. Or on connaît, dans le plan M, six points imaginaires appartenant à cette conique, savoir : γ, γ' sur AB, α, α' sur BC et β, β' sur CA. Donc on peut aisément, d'après le lemme (III), déterminer si cette

[*] Ces points γ, γ' sont les points doubles des deux divisions homographiques marquées sur la droite AB par les rayons homologues ac, ac' ; ai, ai' ; aj, aj'.

[**] Si ces points étaient réels, on se trouverait dans le cas du § IV, sur lequel il n'y a plus lieu de revenir.

courbe est réelle ou imaginaire, circonstances dont l'une ou l'autre entraîne celle de la réalité ou de l'imaginarité de la courbe d'intersection de la surface par le plan à l'infini, et par suite (I) l'*espèce* de cette surface.

VII. Dans le cas où la surface est illimitée, il reste encore à reconnaître si elle est réglée ou non.

Pour cela, il suffit de s'assurer si le plan tangent en l'un de ses points contient deux droites appartenant à la surface, ou simplement si une droite, tracée arbitrairement dans ce plan tangent et ne passant pas par le point de contact, rencontre la surface en deux points réels.

On mènera donc le plan tangent à la surface en son point a, par lequel passent des coniques que les constructions précédentes ont déjà déterminées, et dont les tangentes au point a sont contenues dans ce plan. Puis, menant à volonté une droite dans le plan tangent, on cherchera, par la méthode indiquée au § V de la Note précitée (II), si les deux points d'intersection de cette droite et de la surface sont réels ou imaginaires. Dans le premier cas, la surface est réglée, et, dans le second cas, elle ne l'est pas.

Ainsi, le problème est résolu.

§ II. — *Neuf plans tangents de la surface sont donnés.*

VIII. La question qu'il s'agit actuellement de résoudre est celle-ci :

*Déterminer l'*ESPÈCE *de la surface du second ordre qui touche neuf plans donnés.*

Il suffit, comme dans le premier cas, de déterminer la courbe d'intersection de la surface par le plan situé à l'infini. Si cette courbe est imaginaire, la surface est un ellipsoïde; si elle est réelle, c'est un hyperboloïde, et si elle se réduit à un point, c'est un paraboloïde. Dans ces deux derniers cas, il y aura lieu de rechercher, en outre, si la surface est réglée ou non.

Pour faire concevoir plus clairement comment cette courbe peut être déterminée, je supposerai d'abord que le plan sécant est à distance

finie. Qu'on prenne arbitrairement trois points dans ce plan, et qu'on les regarde comme étant les sommets de trois cônes du second ordre circonscrits à la surface. Chacun de ces cônes aura, dans le plan sécant, deux arêtes (réelles ou imaginaires) qui sont évidemment des tangentes à la courbe d'intersection cherchée. On déterminera ces deux droites, et l'on obtiendra ainsi, dans le plan sécant, six tangentes issues, deux à deux, de trois points fixes, et qui enveloppent la conique cherchée. Si ces trois groupes de tangentes sont réelles, ou si l'un d'eux seulement est réel, la courbe d'intersection l'est aussi. Mais si les six tangentes sont imaginaires, il faudra rechercher, en outre, si la conique qu'elles déterminent est imaginaire ou réelle; car une conique réelle peut avoir trois couples de tangentes imaginaires issues de trois points fixes.

Quand le plan sécant est à l'infini, les cônes deviennent des cylindres; mais les mêmes conclusions subsistent. C'est le cas qui se présente dans la question proposée.

Avant d'entrer dans le détail des constructions qu'exige l'emploi de la solution qui vient d'être exposée en termes généraux, il est nécessaire de traiter quelques questions préliminaires, qui d'ailleurs offrent par elles-mêmes un certain intérêt, et qui peuvent être utiles dans d'autres circonstances. Ces questions font le sujet des quatre paragraphes suivants.

IX. *Une génératrice rectiligne et six plans tangents d'un hyperboloïde à une nappe étant donnés, construire les autres génératrices de la surface.*

Soit a la droite donnée, et A, B, C, D, E, F les six plans. Appelons α, β, γ, δ les droites d'intersection du plan F par les quatre A, B, C, D. On déterminera, dans le plan F, la conique enveloppe des tangentes dont chacune coupe ces quatre droites en quatre points formant un rapport anharmonique constant et égal à celui des quatre points (a, A), (a, B), (a, C), (a, D) où la droite a coupe les quatre mêmes plans (*Géom. sup.*, n° 552).

On déterminera pareillement, dans le plan F, la conique dont les tangentes coupent les quatre droites fixes α, β, γ, ε (intersections du plan F par les plans A, B, C, E), en quatre points, dont le rapport

anharmonique soit constamment égal à celui des quatre points (a, A), (a, B), (a, C), (a, E).

Ces deux coniques, ayant déjà trois tangentes communes, en auront une quatrième réelle, qui jouira évidemment de la propriété, que les points où elle coupera les cinq plans A, B, C, D, E formeront une division homographique à celle des cinq points (a, A), (a, B), (a, C), (a, D), (a, E).

Il en résulte que les droites de jonction des points homologues de ces deux divisions homographiques seront les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe, passant par la droite a et touchant les six plans donnés, puisque chacun de ces plans contient une droite située tout entière sur la surface. Ainsi le problème est résolu.

X. *Étant donnés neuf plans tangents d'une surface du second ordre* S, *et une droite* a *contenue dans l'un* A *de ces plans, on demande de construire le second plan tangent de la surface qui passe par cette droite.*

Qu'on imagine deux des vingt-huit hyperboloïdes à une nappe qui touchent les huit plans B, C, D, E, F, G, H, I; par exemple, celui qui passe par la droite (B, I), et qui touche les six autres plans; et celui qui passe par la droite (C, I) en touchant les six autres plans. Appelons-les U et U'.

Les trois surfaces S, U et U' ont huit plans tangents communs. Donc, d'après un théorème connu, les trois couples de plans tangents qu'on peut leur mener par une droite a, savoir : A, A'; M, M'; et N, N', sont en involution. Le plan A est connu; les quatre M, M', N, N' se déterminent aisément, comme on va le voir. Ainsi A' est déterminé; ce qui résout le problème proposé.

Pour trouver M et M' (ou N et N'), on prendra, sur la droite a, un point arbitraire α. On déterminera, par le problème précédent (IX), cinq génératrices de l'hyperboloïde U, lesquelles, avec le point α, détermineront cinq plans tangents d'un cône du second degré. Enfin, on cherchera les deux plans tangents à ce cône qui passent par la droite a [*]. Ce sont précisément les plans cherchés M, M'.

---

[*] Pour les obtenir, on coupera le cône par un plan arbitraire L. Les cinq plans tangents du cône y intercepteront cinq tangentes d'une conique, à laquelle on mènera

XI. *Étant donnés neuf plans tangents d'une surface du second degré* S, *déterminer les deux plans tangents* A, A' *de la surface, qui passent par une droite donnée* a.

Soient U et U' les deux hyperboloïdes à une nappe dont il s'agit dans le problème précédent (X), et soient W, W' deux autres hyperboloïdes à une nappe, menés, l'un par la droite (D, I), tangentiellement aux six plans B, C, E, F, G, H; l'autre, par la droite (E, I), tangentiellement aux six plans B, C, D, F, G, H.

Soient M, M'; N, N'; P, P'; Q, Q' les quatre couples de plans tangents menés, par la droite a, aux quatre hyperboloïdes respectivement.

Chacune de ces quatre surfaces a huit plans tangents communs avec S. Donc les trois angles dièdres (A, A'), (M, M'), (N, N') sont en involution. Et, pareillement, les trois angles dièdres (A, A'), (P, P'), (Q, Q') sont en involution. Donc les deux plans A, A', qui font partie à la fois des deux involutions, se construiront sans difficulté (*Géom. sup.*, n° **271**). Ce sont les plans tangents demandés.

XII. *Etant donnés, dans un plan, trois points* α, β, γ *et six tangentes imaginaires d'une même conique, issues, par couples, de ces trois points, déterminer la conique, et la construire si elle est réelle.*

Ces tangentes, que j'appellerai $\alpha\varepsilon$, $\alpha\varepsilon'$; $\beta\varphi$, $\beta\varphi'$; $\gamma\psi$, $\gamma\psi'$ sont données par leurs *éléments* réels (*Géom. sup.*, n° **98**), et la condition qu'elles enveloppent une même conique est exprimée par la relation suivante, où n'entrent que des produits réels (*Géom. sup.*, n° **497**), savoir :

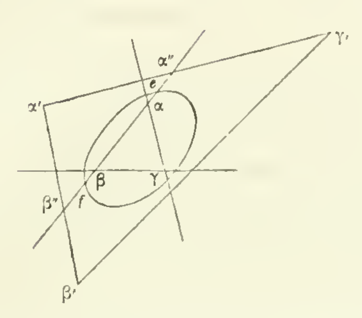
$$\frac{\sin\beta\alpha\varepsilon.\sin\beta\alpha\varepsilon'}{\sin\gamma\alpha\varepsilon.\sin\gamma\alpha\varepsilon'}\cdot\frac{\sin\alpha\gamma\psi.\sin\alpha\gamma\psi'}{\sin\beta\gamma\psi.\sin\beta\gamma\psi'}\cdot\frac{\sin\gamma\beta\varphi.\sin\gamma\beta\varphi'}{\sin\alpha\beta\varphi.\sin\alpha\beta\varphi'}=+1.$$

Les sommets α, β, γ du triangle donné étant, par hypothèse, intérieurs à la conique, chaque côté, tel que $\alpha\beta$, rencontrera nécessaire-

---

deux tangentes par le point où la droite a perce le plan L. Ces deux tangentes et la droite a déterminent les deux plans M, M'.

ment cette courbe en deux points réels e, f, à moins qu'elle ne soit



elle-même imaginaire. Ce sont les deux points e, f qu'on va déterminer.

Que, par chacun des points α, β, γ, on mène les droites conjuguées harmoniques des côtés du triangle par rapport aux deux tangentes imaginaires qui s'y croisent. Ces droites, toujours réelles (*Géom. sup.*, n° **92**), se coupent, deux à deux, aux points α', β', γ', sommets du triangle *polaire* du triangle donné; et si l'on désigne par α'' et β'' les points de rencontre du côté $\alpha\beta$ par les deux droites $\alpha'\beta'$, $\alpha'\gamma'$, issues du pôle α' de $\alpha\beta$, il est visible que les points α, α'' seront *conjugués* par rapport à la conique, parce que la polaire de l'un passe par l'autre, et, pareillement, les points β, β'' seront deux points conjugués. Donc les points cherchés e, f sont les points doubles de l'involution $\alpha\alpha''$, $\beta\beta''$ (*Géom. sup.*, n° **688**). Si ces points sont réels, ce qui aura lieu si les deux segments n'empiètent pas l'un sur l'autre, la conique sera réelle. et l'on en déterminera quatre autres points sur les deux autres côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$. Mais la conique sera imaginaire dans le cas contraire.

XIII. *Étant donnés neuf plans tangents d'une surface du second ordre, déterminer la courbe d'intersection (réelle ou imaginaire) de cette surface par un plan donné.*

Soient S la surface, O le plan sécant, et A, B, C,..., I les neuf plans tangents. On prendra, comme il a été dit ci-dessus (VIII), trois points dans le plan O, et, pour abréger les constructions, on choisira de préférence ceux où viennent se croiser les droites d'intersection de ce plan par trois quelconques des plans tangents donnés; par exemple,

les trois points (O, A, B), (O, A, C) et (O, B, C), que je désignerai par les lettres α, β, γ. Il s'agit d'abord de mener, par chacun de ces points, un cône tangent à la surface. Ne nous occupons que de celui qui a son sommet en α, et que nous désignerons par la notation $\hat{\alpha}$. On connaît déjà deux de ses plans tangents, savoir, A et B; on va en trouver quatre autres. Pour cela, on tracera arbitrairement, dans le plan O, deux droites passant par le point α, et, par chacune de ces droites, on conduira deux plans tangents à la surface S (XI). On aura ainsi six plans tangents du cône $\hat{\alpha}$, lequel est nécessairement réel, puisque son sommet est extérieur à la surface. Il s'agit de trouver les deux arêtes, réelles ou imaginaires, d'intersection de ce cône par le plan O. Pour cela, on coupera toute la figure par un plan arbitraire L; les six plans tangents au cône y intercepteront six tangentes réelles d'une conique, dont on cherchera les points d'intersection ε, ε' par la droite suivant laquelle le plan O coupe ce plan transversal. Les deux droites $\alpha\varepsilon$, $\alpha\varepsilon'$ (qui peuvent être imaginaires) sont les deux arêtes cherchées. Ce sont évidemment deux droites du plan O tangentes à la courbe d'intersection de ce plan et de la surface S. Si elles sont réelles, cette courbe d'intersection l'est aussi; et, si cette réalité est le seul objet qu'on se propose de constater, il ne sera pas nécessaire de pousser plus loin les investigations. Si elles sont imaginaires, on déterminera pareillement les deux tangentes à la surface $\beta\varphi$, $\beta\varphi'$, issues du point β, et les deux $\gamma\psi$, $\gamma\psi'$, issues du point γ. Ces six droites déterminent la conique cherchée, qu'on construira, s'il y a lieu, comme il a été dit ci-dessus (XII).

XIV. *Déterminer l'espèce de la surface du second ordre qui touche neuf plans donnés.*

Il suffit, comme on l'a dit ci-dessus (VIII), de supposer que le plan sécant du problème précédent est à l'infini. Voyons ce que deviennent les constructions indiquées.

Les points α, β, γ sont alors les points infiniment éloignés dans les directions (A, B), (A, C), (B, C), respectivement. Les couples de plans tangents, menés par les droites issues de l'un de ces points dans le plan sécant, deviennent parallèles, deux à deux, et parallèles respective-

ment aux droites (A, B), (A, C), (B, C). Enfin, les trois cônes auxiliaires dégénèrent en cylindres.

On coupera ces trois cylindres par un plan arbitraire L. Ne nous occupons, pour abréger, que de celui dont les génératrices sont parallèles à (A, B). Soit α la trace de cette droite sur le plan L. On mènera, par ce point, des parallèles $\alpha\varepsilon$, $\alpha\varepsilon'$ aux asymptotes de la conique d'intersection du plan L et du cylindre. On aura pareillement, dans ce plan, deux autres couples de droites $\beta'\varphi$, $\beta'\varphi'$ et $\gamma'\psi$, $\gamma'\psi'$, relatives aux deux autres cylindres. Le plan L peut être regardé, quel qu'il soit, comme étant parallèle au plan situé à l'infini : il s'agit de déterminer, dans ce plan L, les éléments d'une conique homothétique à la conique d'intersection de la surface par le plan à l'infini. Pour cela il suffit, par un point quelconque de la droite (A, B), de mener deux droites, l'une parallèle à (A, C) et l'autre parallèle à (B, C); puis, par les points β et γ où ces parallèles coupent le plan L, de mener des droites $\beta\varphi$, $\beta\varphi'$ et $\gamma\psi$, $\gamma\psi'$, parallèles respectivement aux droites $\beta'\varphi$, $\beta'\varphi'$ et $\gamma'\psi$, $\gamma'\psi'$.

Il est évident, d'après cette construction, que la conique déterminée dans le plan L, par les trois couples de tangentes $\alpha\varepsilon$, $\alpha\varepsilon'$; $\beta\varphi$, $\beta\varphi'$; $\gamma\psi$, $\gamma\psi'$ est homothétique à celle qu'il y aurait lieu de considérer dans le plan à l'infini. Donc il suffit de constater la réalité ou l'imaginarité de cette conique (XII). L'*espèce* de la surface en sera une conséquence immédiate.

XV. Cependant, si la surface est illimitée (hyperboloïde ou paraboloïde), il reste encore à reconnaître si elle est réglée. Pour cela, on déterminera le point de contact avec la surface de l'un quelconque des plans tangents donnés. Si la surface est réglée, il passe par ce point deux génératrices rectilignes. Donc si l'on mène, par ce point, une droite quelconque non située dans le plan tangent, on pourra dans ce cas mener, par cette droite, deux plans tangents réels à la surface, savoir, les deux plans passant par cette droite et par les deux génératrices. Si, au contraire, la surface n'est pas réglée, ces deux plans seront imaginaires. On mènera donc une droite par le point de contact, dans une direction quelconque, mais non située dans le plan tangent, et l'on déterminera les deux plans tangents à la surface issus de cette droite (XI). S'ils sont réels, la surface est réglée; s'ils sont

imaginaires, la surface est un hyperboloïde à deux nappes ou un paraboloïde elliptique.

Ainsi, le problème est résolu.

XVI. La question qui vient d'être traitée aurait également pu se résoudre en cherchant les points de contact des neuf plans tangents donnés. Elle aurait ainsi été ramenée à celle où il s'agit de déterminer l'*espèce* d'une surface du second ordre déterminée par neuf points (I); mais il était plus direct et plus élégant de la traiter sans le secours de cet intermédiaire.

RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES

RELATIVES

AU LIEU DES POSITIONS SUCCESSIVES DES CENTRES DE COURBURE D'UNE COURBE QUI ROULE SUR UNE DROITE;

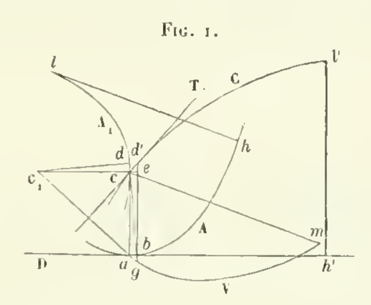
PAR A. MANNHEIM,

Capitaine d'artillerie.

---

1. Soient a (*fig.* 1) le point où une courbe quelconque A touche

Fig. 1.



une droite D sur laquelle elle roule, c le centre de courbure de A correspondant au point a; pour chacune des positions de A, il existe un point tel que c, tous ces points sont sur une certaine courbe C, dont nous allons nous occuper.

2. *Construction de la tangente* T *au point* c *de la courbe* C.

Soient b (*fig.* 1) un point infiniment rapproché de a, d le centre de courbure correspondant à ce point; pour un mouvement infiniment petit de A, b est venu sur D, et le point d est venu en d' sur la courbe C.

Pour déterminer la tangente T, il suffit de chercher la limite de $\frac{d'e}{ce}$; ce égale ab qui est un élément de A, en appelant ρ le rayon de courbure ca et ω l'angle de contingence de A au point a, on a

$$ab = \rho . d\omega;$$

$d'e$ égale cd qui est un élément de la développée A_1 de A, en appelant ρ_1 le rayon de courbure cc_1, on a

$$cd = \rho_1 d\omega;$$

on a donc

$$\frac{d'e}{ce} = \frac{\rho_1}{\rho}:$$

d'où l'on voit que T est perpendiculaire sur ac_1. On peut dire aussi que ac_1 est parallèle à la normale de C qui passe par c.

On arrive, de la même manière, à la construction de la normale au lieu des positions successives des points tels que c_1, etc.

3. *Arc équivalent en longueur à un arc de* C.

Prolongeons cb d'une longueur bg égale à dc, joignons le point a au point g; nous obtenons ainsi un triangle abg qui est égal au triangle ced', on a donc

$$cd' = ag.$$

Ce que nous venons de dire pour cd' est vrai, comme il est facile de le voir, pour d'autres éléments de C ainsi que pour leur somme; en supposant donc que h est venu en h', l en l', et que cm est égale et parallèle à lh, on a l'arc cl' de C égal à l'arc am de V; la courbe V étant le lieu des extrémités des droites, issues d'un point fixe, égales et parallèles aux rayons de courbure de A.

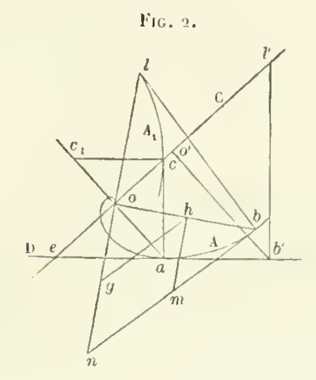
4. *Aire équivalente à l'aire* $cah'l'$ *comprise entre* C, D *et deux ordonnées de* C.

Nous venons de considérer une certaine courbe V (*fig.* 1); il est facile de voir que le secteur $cagm$ limité à cette courbe est équivalent à l'aire $cahl$ comprise entre A et sa développée. Cette dernière aire est équivalente à la moitié de l'aire $cah'l'$: en effet, le rectangle $cabe$ est double du triangle cab; ce que nous disons pour un élément est vrai pour d'autres éléments ainsi que pour leur somme : donc $cah'l'$ est double de $cahl$ ou de son égal $cagm$.

5. *Remarque.* L'équation en coordonnées rectangles de C n'est autre que l'équation de A_1 rapportée à A, en prenant pour abscisses des arcs de A et pour ordonnées les rayons de courbure de cette courbe.

Applications. — *Spirale logarithmique.* — Soit a (*fig.* 2) le point où

Fig. 2.



la spirale A touche la droite D : on sait que pour construire le centre de courbure correspondant au point a, il faut élever, sur le rayon vecteur oa, la perpendiculaire oc jusqu'à sa rencontre en c avec la normale qui passe en a. Le point c ainsi obtenu est le centre de courbure cherché.

En appliquant la construction de Savary, on trouve que le centre de courbure de l'élément décrit par o pendant le roulement de A est à l'infini sur oa, nous pouvons conclure de là que : *le lieu décrit par le point o est la perpendiculaire* C *élevée du point o sur oa; par suite, le lieu des points tels que c est cette même droite* C.

La courbe V de la spirale est une autre spirale qui lui est semblable, d'où l'on conclut, d'après le nº 3, que la spirale logarithmique est rectifiable.

Cette rectification est aussi une conséquence de la connaissance du lieu décrit par le point o : puisque ce point décrit une droite, le point e où celle-ci coupe D correspond à la position qu'occuperait o sur D par suite du roulement, et la distance ae est égale à l'arc de spirale compris entre o et a. De même, en élevant on perpendiculairement à ob jusqu'à sa rencontre en n avec la tangente bn, on a bn égal à l'arc bo; d'après cela, en prenant $(bn - ae)$, on aura une droite égale à l'arc ab. On sait que l'angle oae est constant quel que soit le point de la spirale, il suffit donc de porter oa en oh sur ob, d'élever la perpendiculaire hm sur ob, et l'on obtient bm égale à l'arc ab.

L'aire $cabl$ étant la moitié de $cab'l'$, a pour mesure l'arc ab par la

demi-somme des rayons de courbure ac, bl. On peut exprimer cette aire en fonction des rayons vecteurs oa, ob et de l'angle constant oae.

Désignons cet angle par α et les rayons vecteurs par r et R, on a

$$\text{arc}\, ab = mb = \frac{R - r}{\cos\alpha}, \quad ac = \frac{r}{\sin\alpha}, \quad bl = \frac{R}{\sin\alpha};$$

par suite,

$$\text{aire}\, cabl = \frac{R^2 - r^2}{\sin 2\alpha}.$$

En considérant la courbe V, que nous savons être semblable à A, on trouve que l'aire du secteur oab est égale à $\frac{R^2 - r^2}{2\cos\alpha}$.

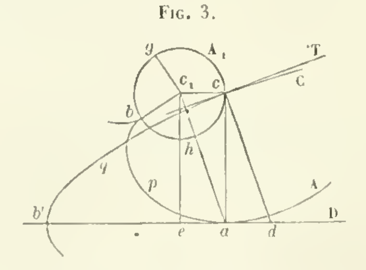
D'après la remarque du n° 3, nous avons pour l'équation de la développée de la spirale A,

$$\frac{y}{x} = \cot g\, \alpha,$$

y représentant les rayons de courbure de A, x les arcs de cette courbe comptés à partir de son pôle, et α l'angle constant des rayons vecteurs avec les tangentes. On peut remarquer aussi que y est la longueur de l'arc de la developpée correspondant à l'arc oa, et l'équation précédente exprime alors que le rapport de ces arcs est constant. Quant au lieu des positions successives des centres de courbure tels que c_1 de la développée A_1, nous dirons seulement que c'est encore une droite qui passe par e.

Développante de cercle (*fig.* 3.). — Pour déterminer la nature

Fig. 3.



de C, nous allons construire la tangente T qui passe par le point c, centre de courbure de la développante A, correspondant au point a. Soit c_1 le centre de la circonférence A_1 développée de A, d'après ce que nous savons (n° 2), il faut abaisser du point c une perpendiculaire sur ac_1, et l'on a la tangente cherchée.

Menons du point c la droite cd parallèle à ac_1, nous avons ainsi la normale à la courbe C, la sous-normale ad étant, par suite de cette construction, égale à $c_1 c$ est constante, donc la *courbe* C *est une parabole*.

Du point c_1 menons la droite $c_1 e$ égale et parallèle à ca, on trouve ainsi le point e sur D; nous voyons donc que dans le cas de la développante de cercle la courbe V se confond avec le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre c_1 sur les tangentes de A.

Quelle que soit la génération de V, il est facile de voir que cette courbe est une spirale d'Archimède. Du point c_1 élevons sur $c_1 b$ la perpendiculaire $c_1 g$, nous avons l'angle $gc_1 h$ égal à l'angle $bc_1 c$: ce dernier est proportionnel à l'arc bhc qui est égal à ca, nous voyons ainsi que les rayons vecteurs tels que $c_1 e$ qui est égal à ca, sont proportionnels aux angles tels que $gc_1 h$ comptés à partir de $c_1 g$, par suite le lieu décrit par le point e est une spirale d'Archimède. En considérant le point e comme le pied de la perpendiculaire $c_1 e$ abaissée sur D, on voit qu'il est toujours le sommet d'un angle droit dont l'un des côtés passe par c_1, et dont l'autre côté est tangent à la courbe A, la normale au lieu décrit par le point e dans ce cas passe en c, et la sous-normale $c_1 c$ étant constante, le point e décrit une spirale d'Archimède [*].

D'après le n° 3, nous voyons que la rectification de l'arc d'une spirale d'Archimède dépend de celle de la parabole.

D'après le n° 4, nous avons

$$\text{aire } bpachb \ \frac{\text{aire } b'acqb'}{2}.$$

nous avons donc

$$\frac{b'a \times ac}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{bpa \times bhc}{3} \text{ pour l'aire } bpachb.$$

---

[*] La distance ca étant constante, on peut supposer le point e lié à la droite ca pendant le roulement de celle-ci sur la circonférence A_1, et appliquer la construction de Savary pour déterminer le centre de courbure de la spirale d'Archimède. Voici la construction du centre de courbure de cette courbe correspondant au point e; en c, et perpendiculairement à cc, on mène la droite cf qui coupe D en f, la ligne qui joint le point c_1 au point f coupe la normale ce au centre de courbure cherché.

Ainsi, *l'aire comprise entre un arc de cercle bhc et l'arc correspondant bpa de sa développante est égale au tiers du produit de ces arcs.*

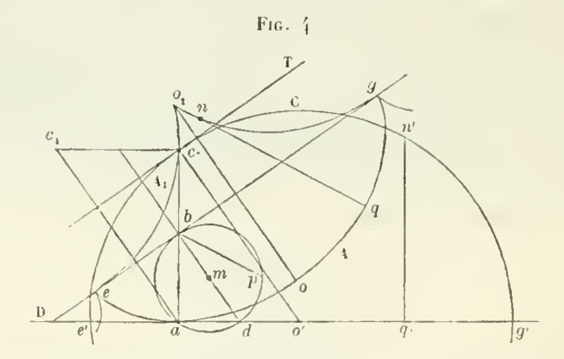
D'après le n° 5, en appelant r le rayon de A_1, l'équation de cette circonférence est $y^2 = 2rx$, les abscisses étant des arcs de sa développante A, et les ordonnées les rayons de courbure de cette courbe. L'ordonnée étant égale à bhc, nous voyons que $\frac{\overline{bhc}^2}{bpa}$ est constant.

L'arc de la développante correspondant à la circonférence A_1 est égal à $2\pi^2 r$, l'on peut remarquer que le rapport de la longueur de cet arc à celui de la circonférence A_1 est égal à π.

Dans le cas du roulement de la développante A, le lieu des positions successives des centres de courbure de sa développée n'est autre que celui du point c_1, il est évident que ce point décrit une parabole. En appliquant la construction de Savary, on retrouve une construction connue du centre de courbure de la parabole.

Cycloïde. (*Fig.* 4.) — Comme dans le cas précédent, nous allons

Fig. 4



chercher T pour déterminer la nature de C. Au point de contact a de la cycloïde A et de la droite D, élevons à cette dernière la perpendiculaire ab, cette droite coupe la base de la cycloïde au point b, et l'on obtient le centre de courbure c de la cycloïde en prolongeant ab d'une longueur égale à elle-même. Au point c élevons sur ac la perpendiculaire cc_1, et du point a abaissons sur la base de la cycloïde la perpendiculaire ac_1, ces deux perpendiculaires se coupent en c_1, centre de courbure de la développée de la cycloïde.

La tangente T est la perpendiculaire abaissée du point c sur ac_1, on

peut remarquer que T est parallèle à la base de la cycloïde; en menant co' parallèlement à la droite ac_1, nous avons la normale à la courbe C.

La droite co' est égale au double du diamètre bd du cercle m générateur de la cycloïde, donc co' a une longueur constante, et par suite *la courbe C est une circonférence ayant un rayon quadruple de celui de la circonférence m.*

Le point o' est fixe, il correspond au point milieu de l'arc eag de A, nous avons l'arc ao égal à ao', c'est-à-dire double de ad; nous retrouvons ainsi la rectification connue. Nous pouvons dire aussi que l'arc ao de la cycloïde est égal à la portion de tangente ao' comprise entre le point de contact a et le point o' où cette tangente est coupée par la perpendiculaire abaissée, sur la base de la cycloïde, du centre de courbure c correspondant au point a. Nous verrons plus loin que cette rectification n'est qu'un cas particulier.

La courbe V, comme il est facile de le voir, est dans ce cas une double de m.

D'après le n° 4 nous avons aire $aoqno_1ca$ égale à la moitié de l'aire $aq'n'o'_1ca$, et puisque la circonférence m est la moitié de V, en menant bp parallèlement à nq, nous avons aussi aire $aoqno_1ca$ égale à quatre fois $adpba$.

En désignant par r le rayon md, par y les arcs de A comptés à partir de o, par x les rayons de courbure de A, nous avons pour équation de la cycloïde A_1

$$y^2 + x^2 = 16r^2.$$

En prenant le point e pour origine des arcs, nous avons

$$y^2 + x^2 - 8rx = 0,$$

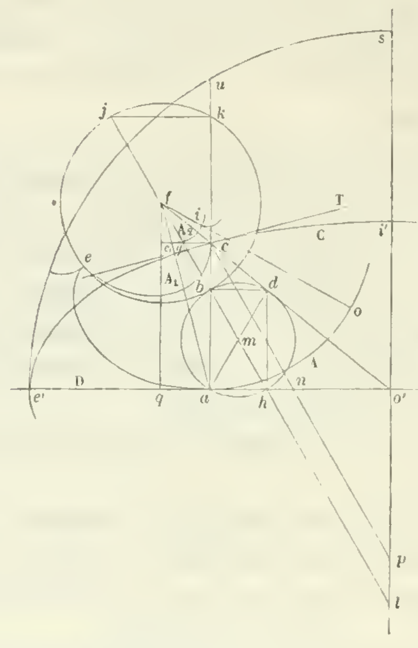
qui exprime la relation qui existe entre un arc moindre que eo et l'arc correspondant de sa développée.

Pendant le roulement de A, le lieu des positions successives des centres de courbure de sa développée est une ellipse dont le grand axe est double du petit.

Epicycloïde. — La développante de cercle et la cycloïde que nous avons déjà examinées ne sont que des cas particuliers de l'épicycloïde dont nous allons maintenant nous occuper.

L'épicycloïde A (*fig.* 5) a été engendrée par le point a de la circonfé-

Fig. 5.



rence m qui a roulé sur la circonférence f. Pour obtenir le centre de courbure c correspondant au point a, on applique la construction de Savary : on joint le point a au centre m, cette ligne rencontre la circonférence m au point d, la ligne qui joint le point f au point d coupe la normale ab au centre de courbure c. On sait que la développée A_1 de A est une courbe semblable à celle-ci, et que la développée A_2 de A_1 est une épicycloïde semblable et semblablement placée à A ; on obtiendra donc le centre de courbure de A_1 correspondant au point c en joignant le point f au point a et cherchant le point c_1 où cette droite coupe la normale cc_1.

Soit o le milieu de l'épicycloïde A ; en joignant le point f au point o on obtient sur A_2 le milieu i de cette épicycloïde ; mais l'arc $c_1 i$ est égal à $c_1 c$; donc en prolongeant fd jusqu'à sa rencontre en o' avec D, on obtiendra ao' égal à l'arc ao [*]. D'après cela, le point o' est le point

[*] Nous pouvons donc dire que l'arc d'épicycloïde compris entre un point a et le milieu o de cette courbe est égal à la portion de tangente ao' comprise entre a et le point

où o, pendant le roulement de A, vient toucher D, ce point o' est donc un point fixe.

Au point o' élevons une perpendiculaire sur D, et du point c menons cp parallèlement à fm, nous allons faire voir que les distances cn et cp sont constantes, et par suite que *la courbe* C *est une ellipse ayant pour centre* o'. La distance cn est égale à gh; pour déterminer celle-ci nous avons

$$\left(\frac{1}{cb} + \frac{1}{ba}\right) \cos abh = \frac{1}{fb} + \frac{1}{bm},$$

ou en désignant fb par R, bm par r,

$$\frac{\cos cbg}{cb} + \frac{\cos abh}{ba} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r},$$

$$\frac{1}{gb} + \frac{1}{2r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r},$$

d'où gb et par suite

$$cn = \frac{2Rr}{R + 2r}.$$

La distance cp est égale à bl ou à $2r + hl$; pour déterminer hl nous avons

$$\frac{hl}{bh} = \frac{do'}{cd} = \frac{bh}{gb},$$

d'où

$$hl = \frac{2r(R + 2r)}{R},$$

et par suite

$$cp = \frac{4r(R + r)}{R}.$$

La courbe C est donc une ellipse ayant pour grand axe $\frac{8r(R + r)}{R}$ et pour petit axe $\frac{4Rr}{R + 2r}$; il est du reste évident que le grand axe est

---

où cette tangente est coupée par la ligne qui joint le point f au centre de courbure c correspondant au point a. Cette rectification comprend, comme cas particulier, celle que nous avons déjà donnée de la cycloïde.

égal à la longueur de l'épicycloïde A et que le petit axe est égal à la longueur de la développée A_1.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante : *Lorsqu'une épicycloïde roule sur une droite, le lieu des positions successives de ses centres de courbure est une ellipse ayant pour grand axe la longueur de cette épicycloïde et pour petit axe la longueur de la développée de cette courbe* [*].

Pour construire la courbe V, prenons pour point fixe le centre f. Du point f menons une parallèle à ca, soit q le point où cette droite coupe D, on a

$$\frac{fq}{ca} = \frac{fh}{cn} = \text{const.}$$

Le rapport $\frac{fq}{ca}$ étant constant, la courbe V est semblable au lieu des projections du centre fixe f sur les tangentes à l'épicycloïde. D'après cela, la rectification de cette dernière courbe dépend de celle de l'ellipse. Ce résultat est aussi la conséquence d'un théorème connu (journal *l'Institut*, 24 février 1858).

Du point o' comme centre avec $o'e'$ pour rayon, décrivons une circonférence ; soient u et s les points où elle est coupée par les lignes ac, $o'i'$; on a

$$\text{aire } aci'o' = \text{aire } auso' \times \frac{cn}{cp},$$

nous avons donc

$$\text{aire } acioa = \frac{cn}{cp} \times \frac{\text{aire } auso'}{2}.$$

Cette dernière valeur est aussi l'aire du secteur de V compris dans l'angle qfo.

L'équation de l'épicycloïde A_1 rapportée à sa développante A, est celle de l'ellipse C. L'équation de cette ellipse, en prenant le som-

[*] On peut remarquer que les points b, g, k, j, f décrivent aussi des ellipses.

On peut dire que : *Lorsqu'une épicycloïde roule sur une droite, le centre de sa base décrit une ellipse.*

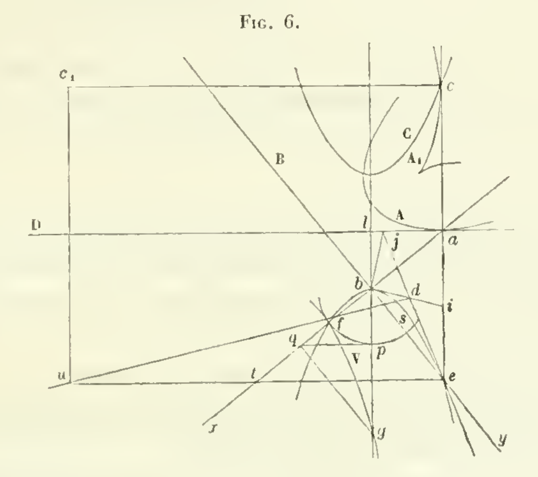
On sait qu'une droite de longueur constante qui se meut dans un angle droit enveloppe une épicycloïde dont l'équation est $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Lorque cette courbe roule sur une droite son centre décrit une ellipse dont le grand axe est double du petit.

met e' pour origine des coordonnées, exprime aussi la relation qui existe entre un arc de A moindre que eo et l'arc correspondant de sa développée.

Il est facile de voir que les points tels que c_1 sont sur une ellipse, on peut donc dire : *Lorsqu'une épicycloïde* A *roule sur une droite, le lieu des positions successives des centres de courbure de sa développée* A_1 *est une ellipse.* On peut remarquer, en outre, que *cette ellipse a pour petit axe la longueur de la développée* A_1, *et pour grand axe une droite égale à la somme des longueurs des courbes* A *et* A_2.

Chaînette. — Soient D (*fig.* 6) la droite sur laquelle roule la chaî-

Fig. 6.



nette A et B la base de cette chaînette; au point a, où la courbe A touche D, élevons la perpendiculaire ac sur D, cette droite coupe B au point e, en prenant ac egale à ac, on a le centre de courbure c correspondant au point a. D'après cela, le lieu des points tels que c ou la courbe C est symétrique, par rapport à D, de la courbe décrite par le point e. Pour avoir ce lieu, considérons le point i milieu de ae, on a

$$bi = ai;$$

donc le point i décrit une parabole [*] : il en est de même du point e, par suite *la courbe* C *est une parabole.*

---

[*] Le point b est fixe; on sait en effet que : *lorsqu'une chaînette roule sur une droite, sa base passe par un point fixe.*

D'après cela, on trouvera facilement la relation qui existe entre un arc de la chaînette et l'arc correspondant de sa développée, ainsi que l'aire comprise entre ces deux courbes.

Prolongeons ab d'une longueur bq égale à elle-même, du point b menons bg parallèlement à ae, et du point q, qg parallèlement à be, ces deux droites se coupent en g : si l'on suppose fixe la chaînette A, le point g construit comme nous venons de le faire décrit la courbe V. Pour obtenir l'équation de cette courbe, nous remarquerons, en abaissant la perpendiculaire qp sur bg, que bp est constant; en désignant cette droite par m, on a

$$qb^2 = m\sqrt{qg^2 + qb^2};$$

en prenant pour axes les lignes fixes be, bq, on peut donc écrire

$$x^2 = m\sqrt{x^2 + y^2}$$

pour l'équation de la courbe V.

Il est facile de construire cette courbe en décrivant du point b comme centre avec m pour rayon une circonférence; au point p on élève à bg la perpendiculaire pq, au point q on élève à bf la perpendiculaire qg, et l'on obtient le point g de la courbe V.

D'après le n° 3 les arcs de cette courbe dépendent de ceux de la parabole, et d'après le n° 4 le secteur fbg est équivalent à la moitié de l'aire $lbsea$, qu'il est très-simple d'évaluer.

Du point e menons une parallèle à D, soit t le point où elle coupe bq, prolongeons et d'une longueur égale à elle-même jusqu'en u; le point u ainsi obtenu est le symétrique, par rapport à D, du centre de courbure c_1 de la développée A_1; d'après la construction de ce point u, on trouvera facilement l'équation du lieu des positions successives des centres de courbure de la développée d'une chaînette pendant le roulement de celle-ci sur une droite. Pour construire la tangente au point u de ce lieu, on élève à bi la perpendiculaire bj, on joint le point j au point e, la droite je, tangente à la parabole, coupe la droite bi au point d; en joignant le point d au point u, on a la tangente cherchée. Nous ne ferons pas la démonstration de cette construction, qui sort de l'objet principal de nos recherches.

DÉMONSTRATION

DE

L'IRRÉDUCTIBILITÉ DE L'ÉQUATION AUX RACINES PRIMITIVES DE L'UNITÉ;

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

Une racine de l'équation

$$x^n = 1$$

est dite primitive quand toutes ses puissances $\rho, \rho^2, \rho^3, \ldots, \rho^{n-1}, \rho^n = 1$ sont différentes et composent la suite complète des racines de l'équation

$$x^n = 1.$$

Cela arrive par exemple quand on prend

$$\rho = \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

La puissance ρ^α est encore racine primitive si α est premier à n, mais cela n'arrive pas dans le cas contraire, car si δ diviseur de n divisait aussi α, on aurait alors

$$(\rho^\alpha)^{\frac{n}{\delta}} = 1.$$

Si l'on pose

$$n = p^a q^b r^c \ldots,$$

les nombres p, q, r, etc., étant premiers et différents, et

$$\varphi(n) = p^{a-1}(p-1)q^{b-1}(q-1)\ldots,$$

les racines primitives seront en nombre $\varphi(n)$, et l'équation aux racines primitives sera

$$\mathrm{F}(x) = 0.$$

La règle pour former le polynôme $\mathrm{F}(x)$ à coefficients entiers est

bien connue : on peut la voir dans les *Exercices* de M. Cauchy, année 1829.

L'irréductibilité de l'équation

$$F(x) = 0$$

assez facile à établir pour

$$n = p \quad \text{et} \quad n = p^a,$$

le nombre p étant supposé premier, paraissait l'être beaucoup moins pour le cas général. En 1854 M. Kronecker a donné la démonstration complète dans le t. XIX du *Journal de Mathématiques*, en employant, pour obtenir des théorèmes plus généraux, la théorie des nombres complexes formés avec les racines de l'unité. Depuis, M. Arndt (Journal de Crelle, t. LVI, p. 178) a donné une démonstration plus courte. En cherchant à éclaircir sa Note, dont la seconde partie est rendue obscure par une faute d'impression qui ne se découvre pas immédiatement, j'ai complété une démonstration commencée depuis longtemps et que le Mémoire de M. Kronecker m'avait semblé rendre inutile.

La voici cependant; elle est assez facile à suivre. Ce n'est qu'une modification de la démonstration de M. Arndt.

Proposition I. — *Soit*

$$F(x) = 0$$

l'équation aux racines primitives de l'équation

$$x^n = 1,$$

de plus

$$n = p^a q^b r^c \ldots, \quad \varphi(n) = p^{a-1}(p-1) q^{b-1}(q-1) \ldots$$

comme il a été dit plus haut, et

$$n = p^a n' :$$

on aura, en posant $x'^{n'} = 1$,

$$p = F(x').G(x'),$$

et, pour $n' = 1$,

$$p = F(1),$$

la caractéristique G *indiquant une fonction de x à coefficients entiers comme* F, *et qui se réduit à l'unité pour $n' = 1$.*

Quand n renferme plusieurs nombres premiers différents, on a toujours

$$F(1) = 1.$$

N. B. Cette dernière partie n'étant pas nécessaire pour la démonstration de l'irréductibilité, sa démonstration est omise.

Proposition II. — *Si l'équation*

$$F(x) = 0$$

est réductible, on aura

$$F(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_\nu(x),$$

les polynômes irréductibles $f_i(x)$ à coefficients entiers étant tous de même degré.

Proposition III. — *La proposition I montre que la décomposition supposée dans la proposition II est impossible ; de là résulte l'irréductibilité de l'équation* $F(x) = 0$, *quel que soit l'exposant n.*

Voici la démonstration de la proposition I :

On a

$$(a) \quad \frac{x^n - 1}{x^{\frac{n}{p}} - 1} = \left(x^{\frac{n}{p}}\right)^{p-1} + \left(x^{\frac{n}{p}}\right)^{p-2} + \ldots + x^{\frac{n}{p}} + 1 = F(x).G(x).$$

Pour $n = p^a$, on voit, par ce qui précède, que

$$G(x) = 1.$$

Ainsi, pour $x = 1$ on a, dans ce cas,

$$p = F(1).$$

En général, si

$$x'^{n'} = 1 \quad \text{ou} \quad x'^{\frac{n}{p^a}} = 1,$$

il en résulte

$$x'^{\frac{n}{p}} = 1,$$

et, par conséquent, l'identité (a) donne

$$p = F(x').G(x').$$

La démonstration des propositions II et III dépend de théorèmes bien connus. Si de l'équation à coefficients entiers

$$f(x) = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + M = 0,$$

où les racines sont α, β, γ, ..., on passe à l'équation de même degré

$$\mathfrak{F}(x') = x'^m + A_1 x'^{m-1} + B_1 x'^{m-2} + \ldots + M_1 = 0,$$

où les racines sont α^k, β^k, γ^k,..., k étant un entier positif, les coefficients A_1, B_1, C_1,..., M_1 sont entiers. Cela suffit pour établir la proposition II; mais pour la proposition III, il faut ajouter que si $k = p^a$, le nombre p étant premier, les coefficients A_1, B_1, C_1,... se changent, en supposant A', B', C',... entiers, en

$$A + pA', \quad B + pB', \quad C + pC' \ldots;$$

de là, en posant $x^{p^a} = x'$, on a l'identité

$$(b) \qquad f(x') + p\psi(x') = \mathfrak{F}(x')$$

où, ce qu'il faut remarquer, $\psi(x')$ est aussi bien que $f(x')$ une fonction entière à coefficients entiers.

Démonstration de la proposition II.

Admettons que l'on ait

$$F(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_\nu(x),$$

les différents facteurs $f_i(x)$ étant irréductibles et à coefficients entiers. Soit

$$f_i(x) = (x - \rho^\alpha)(x - \rho^\beta) \ldots$$

et

$$f_k(x) = (x - \rho^{\alpha'})(x - \rho^{\beta'}) \ldots;$$

ρ étant une racine primitive, et α, β, ..., α', β', ... des nombres premiers à n. Si le degré de $f_i(x)$ surpasse celui de $f_k(x)$, en posant

$$\alpha j = hn + \alpha',$$

et passant de l'équation $f_i(x) = 0$ à l'équation $f_i(x^j) = 0$, on changerait le polynôme $f_i(x)$ en un autre de même degré ayant le facteur $x - \rho^{\alpha'}$, et il s'ensuivrait que $f_i(x)$ pourrait se décomposer, ce qui est contre l'hypothèse. Il se trouve donc prouvé que les facteurs $f_i(x)$ sont nécessairement de même degré.

Démonstration de la proposition III.

Si d'abord on suppose

$$n = p^a,$$

et que l'on ait

$$F(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_\nu(x),$$

on trouvera

$$f_1(x') + p\psi_1(x') = \mathfrak{F}_1(x'),$$

d'après l'équation (b); or ici

$$x^{p^a} = 1,$$

$\mathfrak{F}_i(x')$ devient une puissance de $x' - 1$ et s'annule pour $x' = 1$: ainsi

$$f_1(1) = - p\psi_1(1);$$

en multipliant membre à membre toutes les équations semblables, on aura, en posant $(-1)^\nu \psi_1(1)\psi_2(1)\ldots\psi_\nu(1) = \Psi(1)$, l'équation

$$F(1) = p^\nu . \Psi(1)$$

et, par suite,

$$1 = p^{\nu - 1} . \Psi(1);$$

ce qui est impossible, $\Psi(1)$ étant entier.

Quand on a

$$n = p^a q^b,$$

l'équation transformée

$$\mathfrak{F}_i(x') = 0$$

n'a plus toutes ses racines égales à l'unité; mais comme pour avoir

$$(x^{p^a})^m = 1$$

il faut prendre m multiple de n' $(n = p^a . n')$, l'équation

$$\mathfrak{F}_i(x') = (x' - \rho^{\alpha p^a}) \ldots = 0$$

a pour racines seulement des racines primitives de

$$x'^{n'} = 1 \quad \text{ou} \quad x'^{q^b} = 1.$$

Or l'équation qui donne les racines primitives de l'équation $x'^{q^b} = 1$ est irréductible; il faut donc que l'équation

$$\mathfrak{F}_i(x') = 0$$

les contienne toutes; ainsi, en représentant l'une d'elles par x', on aura nécessairement, en vertu de l'équation

$$f_i(x') + p\psi_i(x') = \mathfrak{F}_i(x')$$

l'équation

$$f_i(x') = -p\psi_i(x').$$

La multiplication des ν équations analogues donnera

$$F(x') = p^\nu \Psi(x');$$

mais

$$p = F(x').G(x'),$$

de là

$$p = p^\nu \Psi(x').G(x') = p^\nu \xi(x')$$

ou

$$(c) \qquad 1 = p^{\nu-1}\xi(x').$$

Or l'équation en x' est irréductible et de degré

$$\varphi(q^b) = \lambda,$$

donc $\xi(x')$ se ramène à la forme

$$A_0 + A_1 x' + \ldots + A_{\lambda-1} x'^{\lambda-1},$$

de sorte que l'équation (c) devenant

$$-1 + p^{\nu-1}\left(A_0 + A_1 x' + \ldots + A_{\lambda-1} x'^{\lambda-1}\right) = 0,$$

le premier membre devrait être identiquement nul, ce qui est impossible, $-1 + p^{\nu-1}A_0$ ne pouvant l'être.

Ainsi, l'équation $F(x) = 0$ est irréductible pour $n = p^a q^b$.

Si l'on fait maintenant $n = p^a q^b r^c = p^a n'$, $n' = q^b r^c$, la démonstration se donnera précisément dans les mêmes termes, parce que l'irréductibilité est prouvée pour $n' = q^b r^c$. La démonstration s'établit donc de proche en proche.

Le lecteur verra facilement, en consultant la Note de M. Arndt, ce que j'y ai pris, et quelle est la part qui me revient dans la démonstration précédente.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

NEUVIÈME ARTICLE.

Le mode de partition que nous avons appliqué, dans nos deux derniers articles, au nombre fondamental m (pair ou impair) que nos formules concernent, consiste à poser

$$m = m'^2 + m'' = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

où m' est un entier quelconque, pair ou impair, positif ou négatif, ou même zéro, tandis que m'' est essentiellement positif, aussi bien que d'' et δ'', lesquels, de plus, sont impairs : quant à l'exposant α'', il peut se réduire à zéro, ou être plus grand que zéro, suivant les cas. C'est à l'ensemble des groupes m', m'' et aux diverses valeurs des diviseurs $2^{\alpha''} d''$, δ'' que se rapportent les sommes doubles que nous avons considérées dans les articles cités. Il en sera de même, dans l'article actuel, pour la somme nouvelle

$$\sum\sum (-1)^{m''-1} \delta'' f(2^{\alpha''} d'' + m'),$$

dont nous voulons nous occuper, et où $f(x)$ désigne une fonction algébrique ou numérique paire, je veux dire telle, que

$$f(-x) = f(x),$$

pour toutes les valeurs de x dont on aura à faire usage : ces valeurs sont des entiers de même espèce que m, constamment pairs ou constamment impairs, suivant que m est pair ou impair.

Mais à côté de cette somme double figurera une somme simple

$$\sum \zeta_1(m_2) f(m_1),$$

où la fonction f sera la même, mais qui proviendra d'un mode de partition un peu différent et plus limité, en ce que pour compléter la valeur de m, en ajoutant un entier à un carré moindre que m, nous exigerons que cet entier soit pair. En d'autres termes, nous faisons

$$m = m_1^2 + 2m_2,$$

m_1 étant un entier positif, nul ou négatif, et m_2 un entier positif. C'est aux groupes m_1, m_2, ainsi définis, que se rapporte la somme simple

$$\sum \zeta_1(m_2) f(m_1),$$

dans laquelle $\zeta_1(m_2)$ représente à l'ordinaire la somme des diviseurs de m_2. On voit que les valeurs de m_1 ne peuvent être que paires quand m est pair, et qu'impaires quand m est impair : au contraire m_2 est indifféremment pair ou impair.

Cela posé, je trouve que les deux sommes indiquées sont généralement égales entre elles : il n'y a exception que quand m est un carré; et alors l'excès de la première sur la seconde a pour valeur $mf(\sqrt{m})$. En d'autres termes, on a

$$(\zeta) \sum (-1)^{m''-1} \delta'' f(2^{\alpha''} d'' + m') - \sum \zeta_1(m_2) f(m_1) = mf(\sqrt{m}), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Pour $m = 1$, on ne peut prendre que $m' = 0$, $m'' = 1$, et il n'y a aucun groupe m_1, m_2 qui soit admissible. La première somme se réduit donc au seul terme $f(1)$ et l'autre à zéro : la valeur du second membre est en effet $f(1)$, l'unité étant un carré.

Pour $m = 2$, on a d'une part les trois systèmes

$$m' = 0, \quad m'' = 2; \quad m' = 1, \quad m'' = 1; \quad m' = -1, \quad m'' = 1;$$

et d'autre part celui-ci

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 1.$$

Les deux quantités à retrancher ont donc la même valeur $f(0)$.

Il en est de même pour $m = 3$. Alors on doit prendre successivement

$$m' = 0, \quad m'' = 3; \quad m' = 1, \quad m'' = 2; \quad m' = -1, \quad m'' = 2,$$

et

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1; \quad m_1 = -1, \quad m_2 = 1.$$

La valeur commune des deux sommes est $2f(1)$.

Enfin pour $m = 4$, on a $4f(2)$ au second membre; et c'est bien là ce qui résulte des groupes à employer, savoir

$$m' = 0, \quad m'' = 4; \quad m' = 1, \quad m'' = 3; \quad m' = -1, \quad m'' = 3;$$

et

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 2.$$

Prenons, comme nous en avons le droit,

$$f(x) = x \sin(xt),$$

t désignant une constante quelconque; et la formule (ζ) nous donnera la valeur de la différence des deux sommes

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''(2^{\alpha''}d'' + m')\sin(2^{\alpha''}d'' + m')t$$

et

$$\sum m_1\zeta_1(m_2)\sin(m_1 t),$$

dont la première peut être mise sous la forme

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}m''\sin(2^{\alpha''}d''t)\cos m't$$
$$+\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta'' m'\cos(2^{\alpha''}d''t)\sin m't,$$

en développant le sinus qu'elle contient et en supprimant les termes qui se détruisent deux à deux à cause des valeurs égales et de signes contraires que m' doit prendre. La différence dont il s'agit est généralement nulle : il n'y a exception que quand m est un carré, et alors elle est égale à

$$m\sqrt{m}\sin(t\sqrt{m});$$

mais ce cas ne se présentera jamais si nous supposons m impair et de la forme $8\nu + 5$. Développons les calculs dans cette hypothèse de

$m = 8\nu + 5$, en faisant de plus $t = \frac{\pi}{2}$: nous obtiendrons un résultat intéressant.

Nous avons trois sommes à considérer, savoir

$$\sum\sum(-1)^{m''-1} m'' \sin\left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(m' \frac{\pi}{2}\right)$$

et

$$\sum\sum(-1)^{m''-1} \delta'' m' \cos\left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(m' \frac{\pi}{2}\right),$$

puis

$$\sum m_1 \zeta_1(m_2) \sin\left(m_1 \frac{\pi}{2}\right).$$

le total des deux premières équivaut à la troisième.

On n'aura égard, dans

$$\sum\sum(-1)^{m''-1} m'' \sin\left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(m' \frac{\pi}{2}\right),$$

qu'aux valeurs paires de m', vu que pour les autres $\cos\left(m'\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ainsi on fera successivement $m' = 0$, $m' = \pm 2, \ldots$, $m' = \pm 2\mu$, en désignant par $4\mu^2$ le plus grand carré pair contenu dans m. A ces valeurs de m' répondront les valeurs de m'' que voici : $m'' = m$, $m'' = m - 4, \ldots$, $m'' = m - 4\mu^2$. Elles sont toutes impaires, en sorte que toujours

$$(-1)^{m''-1} = 1, \quad \alpha'' = 0, \quad \sin\left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(d'' \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{d''-1}{2}}.$$

Cela étant, posons à l'ordinaire, pour tout nombre impair $m = d\delta$,

$$\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}} = \rho(m);$$

et nous trouverons que la somme dont nous nous occupons revient à

$$m\rho(m) - 2(m-4)\rho(m-4) + 2(m-16)\rho(m-16) + \ldots \\ \pm 2(m-4\mu^2)\rho(m-4\mu^2).$$

On la simplifie d'ailleurs, en se rappelant l'équation

$$\rho(m) - 2\rho(m-4) + 2\rho(m-16) - \ldots \pm 2\rho(m-4\mu^2) = 0,$$

que nous avons donnée dans notre huitième article. Il reste simplement

$$8\rho(m-4) - 32\rho(m-16) + \ldots \mp 8\mu^2\rho(m-4\mu^2).$$

Dans la somme

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta'' m' \cos\left(2^{\alpha''}d''\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\frac{\pi}{2}\right),$$

ce sont les valeurs paires de m' que l'on doit négliger comme donnant

$$\sin\left(m'\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Les valeurs de m' à employer sont donc $m' = \pm 1$, $m' = \pm 3, \ldots$, $m' = \pm \omega$, en désignant par ω^2 le plus grand carré impair contenu dans m. Comme m est de la forme $8\nu + 5$ et m'^2 de la forme $8\nu + 1$, l'équation

$$m'' = m - m'^2$$

nous montre que m'' est ici le quadruple d'un nombre impair i, en sorte que

$$m'' = 2^{\alpha''}d''\delta'' = 4i, \quad \alpha'' = 2, \quad \cos\left(2^{\alpha''}d''\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad (-1)^{m''-1} = -1\,:$$

de plus δ'' représente un quelconque des diviseurs de i. Nous voyons donc que

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta'' m' \cos\left(2^{\alpha''}d''\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m'\frac{\pi}{2}\right)$$

s'exprime finalement par

$$-2\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right) + 6\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right) - 10\zeta_1\left(\frac{m-25}{4}\right) + \ldots \pm 2\omega\zeta_1\left(\frac{m-\omega^2}{4}\right).$$

Nous ferons passer cette quantité, changée de signe, dans le second membre de l'équation que nous venons de former, afin de l'ajouter à

$$\sum m_1\zeta_1(m_2)\sin\left(m_1\frac{\pi}{2}\right),$$

qui dépend des mêmes fonctions ζ_1. On doit faire successivement

$$m_1 = \pm 1, \quad m_1 = \pm 3, \quad m_1 = \pm 5, \ldots, \quad m_1 = \pm \omega,$$

avec

$$m_2 = \frac{m - m_1^2}{2}.$$

Or m_2 se trouve être ainsi le double d'un impair (dans notre hypothèse de $m = 8\nu + 5$). Par suite

$$\zeta_1(m_2) = 3\zeta_1\left(\frac{m_2}{2}\right) = 3\zeta_1\left(\frac{m - m_1^2}{4}\right).$$

La somme

$$\sum m_1 \zeta_1(m_2) \sin\left(m_1 \frac{\pi}{2}\right)$$

est donc égale à

$$6\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right) - 18\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right) + 30\zeta_1\left(\frac{m-25}{4}\right) - \ldots \pm 6\omega\zeta_1\left(\frac{m-\omega^2}{4}\right).$$

Cela nous conduit, après la suppression du facteur 8 dans les deux membres, à conclure définitivement que les deux quantités suivantes

$$\rho(m-4) - 4\rho(m-16) + 9\rho(m-36) - \ldots \pm \mu^2\rho(m-4\mu^2)$$

et

$$\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right) - 3\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right) + 5\zeta_1\left(\frac{m-25}{4}\right) - \ldots \pm \omega\zeta_1\left(\frac{m-\omega^2}{4}\right),$$

ont la même valeur, pour tout entier m de la forme $8\nu + 5$. Pour $m = 37$, par exemple, on doit avoir

$$\rho(33) - 4\rho(21) + 9\rho(1) = \zeta_1(9) - 3\zeta_1(7) + 5\zeta_1(3),$$

chose aisée à vérifier en observant que

$$\rho(33) = 0, \quad \rho(21) = 0, \quad \rho(1) = 1, \quad \zeta_1(9) = 13, \quad \zeta_1(7) = 8, \quad \zeta_1(3) = 4:$$

la valeur commune des deux membres est 9.

L'égalité que nous venons d'obtenir entraîne des corollaires dont il est bon de dire un mot.

Posons, de toutes les manières possibles,

$$m = 4s^2 + s_1^2 + s_2^2,$$

s étant un entier positif, tandis que s_1 et s_2 sont des entiers indifféremment positifs ou négatifs, ou même zéro. La somme

$$\sum(-1)^{s-1}s^2,$$

étendue à toutes les valeurs de s, dont plusieurs peuvent être égales

entre elles, s'exprime aisément à l'aide du signe ρ, dès qu'on se rappelle que $4\rho(m)$ est le nombre des représentations de m par une somme de deux carrés. Dès lors, en effet, on voit que les diverses valeurs possibles de s qui sont contenues dans la suite 1, 2, 3,..., μ (en continuant à désigner par $4\mu^2$ le plus grand carré pair inférieur à m) répondent aux représentations de $m - 4s^2$ par une somme de deux carrés $s_1^2 + s_2^2$, et dès lors chacune d'elles figure dans l'ensemble des équations

$$m = 4s^2 + s_1^2 + s_2^2$$

un nombre de fois marqué par

$$4\rho(m - 4s^2).$$

La somme

$$\sum (-1)^{s-1} s^2$$

est donc égale à quatre fois celle-ci :

$$\rho(m-4) - 4\rho(m-16) + 9\rho(m-36) - \ldots \pm \mu^2 \rho(m - 4\mu^2).$$

Posons, en second lieu,

$$m = n^2 + 4(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2),$$

n étant un entier positif et impair, tandis que n_1, n_2, n_3, n_4 sont des entiers à volonté pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs. Nous trouverons semblablement (dans notre hypothèse de $m = 8\nu + 5$) que la somme

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

est égale à huit fois celle-ci :

$$\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right) - 3\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right) + 5\zeta_1\left(\frac{m-25}{4}\right) - \ldots \pm \omega\zeta_1\left(\frac{m-\omega^2}{4}\right),$$

ω^2 étant toujours le plus grand carré impair contenu dans m. Il suffit de se rappeler que $8\zeta_1(m)$ est le nombre des représentations de l'entier impair m par une somme de quatre carrés, et d'appliquer ce théorème à $\frac{m-n^2}{4}$, en donnant à n les valeurs successives 1, 3, 5,..., ω.

Le résultat obtenu plus haut concernant les fonctions ρ et ζ_1 nous

apprend donc que

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 2 \sum (-1)^{s-1} s^2,$$

ce qui est assez curieux.

Soit, par exemple, $m = 5$. Les équations

$$5 = 4.1^2 + 1^2 + 0^2, \qquad 5 = 4.1^2 + 0^2 + 1^2,$$
$$5 = 4.1^2 + (-1)^2 + 0^2, \quad 5 = 4.1^2 + 0^2 + (-1)^2,$$

nous donnent

$$\sum (-1)^{s-1} s^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4,$$

tandis que les équations

$$5 = 1^2 + 4(1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2) = 1^2 + 4[(-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2],$$
$$5 = 1^2 + 4(0^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2) = 1^2 + 4[0^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2],$$
$$5 = 1^2 + 4(0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2) = 1^2 + 4[0^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2],$$
$$5 = 1^2 + 4(0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2) = 1^2 + 4[0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2],$$

prouvent que

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 8,$$

ce qui est bien le double de 4.

Au lieu de décomposer m sous la forme

$$n^2 + 4(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2),$$

on aurait pu décomposer ce nombre ($m = 8\nu + 5$) en une somme de cinq carrés à racines impaires et positives, de manière à avoir

$$m = r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2,$$

les entiers r, r_1, r_2, r_3, r_4 étant tous positifs impairs, tandis que tout à l'heure n seul était soumis à cette condition. Il faudra donc prendre successivement pour r, comme on le faisait pour n, les valeurs 1, 3, 5,..., ω, puis décomposer en quatre carrés impairs, à racines positives, l'entier $m - r^2$, qui est le quadruple du nombre impair

$$\frac{m - r^2}{4}.$$

Pour chaque valeur de r le nombre des décompositions dont il s'agit est, comme on le sait,

$$\zeta_1\left(\frac{m-r^2}{4}\right).$$

La somme

$$\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r,$$

étendue à toutes les valeurs de r égales ou inégales dans l'ensemble des décompositions, s'exprime donc par

$$\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right)-3\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right)+5\zeta_1\left(\frac{m-25}{4}\right)-\ldots\pm\omega\zeta_1\left(\frac{m-\omega^2}{4}\right).$$

Il s'ensuit que l'égalité

$$\sum(-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 2\sum(-1)^{s-1}s^2$$

peut être remplacée par celle-ci :

$$\sum(-1)^{s-1}s^2 = 4\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r.$$

Pour $m=5$, le premier membre est égal à 4. Il faut donc qu'on ait alors

$$\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r = 1.$$

Or cela est vrai ; car 5 ne peut se décomposer en cinq carrés à racines positives impaires que d'une seule manière, où $r=1$:

$$5 = 1^2+1^2+1^2+1^2+1^2.$$

Pour le nombre 13, qui est aussi de la forme $8\nu+5$, on trouvera (quoique le nombre des décompositions soit beaucoup plus grand) les mêmes valeurs pour nos sommes, savoir

$$\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r = 1,\quad \sum(-1)^{s-1}s^2 = 4,\quad \sum(-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 8.$$

Mais pour $m = 21$, il vient

$$\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r = -6, \quad \sum(-1)^{s-1} s^2 = -24, \quad \sum(-1)^{\frac{n-1}{2}} n = -24.$$

Toujours on a

$$\sum(-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 2\sum(-1)^{s-1} s^2 = 8\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}} r.$$

Revenons à l'équation générale (ζ) afin d'indiquer au moins la formule importante qu'elle fournit quand on y pose

$$f(x) = \cos(xt),$$

t étant une constante quelconque. On voit d'abord que la différence des deux sommes

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''\cos(2^{\alpha''}d'' + m')t$$

et

$$\sum\zeta_1(m_2)\cos m_1 t$$

est généralement nulle : il n'y a exception que quand m est un carré, auquel cas elle devient

$$m\cos(t\sqrt{m}).$$

Mais en développant $\cos(2^{\alpha''}d'' + m')t$, et en supprimant les termes égaux et de signes contraires qui naissent du double signe que m' peut prendre, on a un résultat plus élégant, savoir

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''\cos(2^{\alpha''}d''t)\cos m't - \sum\zeta_1(m_2)\cos m_1 t = m\cos(t\sqrt{m}), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

NOUVELLE THÉORIE
DES
FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

DEUXIÈME PARTIE.

DES PÉRIODES DES INTÉGRALES.

CHAPITRE III.

De la quadrature des courbes imaginaires et des périodes des intégrales simples.

21. *Quadrature de la conjuguée dont les abscisses sont réelles.* — L'aire comprise entre l'axe des x, deux ordonnées et un arc de la conjuguée qui a sa caractéristique infinie, s'obtient par la même intégration qui fournirait l'aire d'un segment analogue de la courbe réelle : la même intégrale $\sin YX \int y\,dx$ prise entre des limites réelles par rapport à x, représentera soit l'aire d'un segment de la courbe réelle, soit l'aire d'un segment de la conjuguée $C = \infty$, suivant que les valeurs de y correspondantes aux valeurs qu'aura prises la variable x, seront réelles ou imaginaires.

Dans le second cas, l'intégrale aura la forme $A + B\sqrt{-1}$: A représentera l'aire d'un segment du diamètre correspondant aux cordes parallèles à l'axe des y de la conjuguée $C = \infty$, et B l'aire comprise entre cette conjuguée et son diamètre.

22. *Quadrature d'une conjuguée quelconque.* — On pourrait évaluer l'aire d'une conjuguée quelconque de la courbe réelle, en ren-

dant préalablement ses abscisses réelles. Après avoir donné à l'axe des y une direction convenable, on obtiendrait, comme dans le cas précédent, la mesure de l'aire comprise entre l'ancien axe des x, deux parallèles au nouvel axe des y, et un arc quelconque de la conjuguée considérée; pour avoir l'aire qu'on se proposait d'obtenir, et qui devait être comprise entre l'axe des x, deux parallèles à l'ancien axe des y et l'arc de la conjuguée, il ne resterait qu'à corriger le résultat obtenu, en y ajoutant la différence des aires des deux triangles qui auraient pour sommets les points extrêmes de l'arc de la conjuguée, pour côtés, des parallèles à l'ancien et au nouvel axe des y, et pour bases, les segments de l'axe des x interceptés par ces parallèles.

Mais alors pour chaque conjuguée on aurait à effectuer une transformation de coordonnées, la résolution par rapport à y de la nouvelle équation de la courbe, et, ce qui serait pis encore, une nouvelle intégration. Toutes ces complications peuvent être évitées, et la seule intégration qu'exige la quadrature de la courbe réelle suffira à la quadrature de toutes ses conjuguées.

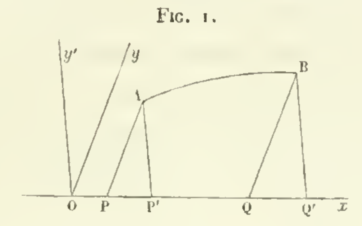
La direction des ordonnées qui limitent le segment qu'on veut calculer est presque toujours indifférente par elle-même; un changement dans cette direction n'entraîne qu'une correction toujours facile à faire et qui n'affecte pas la partie intéressante, au point de vue analytique, de l'intégrale qui représente le segment considéré. Pour cette raison, et pour fixer le langage, lorsqu'il s'agira d'une conjuguée quelconque, nous ne nous occuperons que de l'aire comprise entre un arc de cette conjuguée, deux de ses cordes réelles et l'axe des x; c'est toujours d'un segment pareil que nous entendrons parler, lorsque nous nous occuperons de l'aire de la conjuguée, et c'est ce segment que nous allons nous proposer d'évaluer.

Le principe qui va nous servir à ramener à une seule toutes les intégrations, en apparence différentes, qu'il faudrait effectuer pour carrer les différentes conjuguées d'une même courbe, résulte de la remarque suivante : Une seule intégration effectuée par rapport à la courbe réelle, rapportée à certains axes, suffirait pour qu'on pût, par des transformations algébriques simples, former l'expression analytique de l'aire d'un segment de la même courbe rapportée à d'autres axes; mais on sait, d'un autre côté, que chaque expression de l'aire de la courbe

réelle rapportée à des axes quelconques convient à l'aire de la conjuguée dont les abscisses sont alors réelles. Il est facile de préjuger de là qu'une seule et même intégration doit suffire pour carrer la courbe réelle et toutes ses conjuguées.

Soit AB (*fig.* 1) un arc de la courbe réelle rapportée successivement

Fig. 1.



aux axes OX, OY et OX, OY', l'aire à calculer sera PABQ ou P'ABQ', et sera représentée par

$$\sin YX \int y\,dx,$$

ou par

$$\sin Y'X \int y'\,dx',$$

ces intégrales étant prises entre les limites $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$ ou $[x'_0, y'_0]$, $[x'_1, y'_1]$ qui correspondent aux extrémités A et B de l'arc considéré ; la différence de ces deux intégrales est celle des aires des deux triangles QBQ' et PAP', qui ont pour mesures

$$-\sin Y'Y \cdot \frac{y_1 y'_1}{2} \quad \text{et} \quad -\sin Y'Y \frac{y_0 y'_0}{2}.$$

En remplaçant y'_0 et y'_1 par leurs valeurs en fonction de (x_0, y_0), (x_1, y_1) tirées des formules de transformation

$$x \sin YX = x' \sin YX + y' \sin Y'Y,$$
$$y \sin YX = y' \sin Y'X,$$

on obtient, pour expression de cette différence,

$$\sin Y'X \int_{x'_0 y'_0}^{x'_1 y'_1} y'\,dx' - \sin YX \int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\,dx = -\frac{1}{2} \sin Y'Y \frac{\sin YX}{\sin Y'X}(y_1^2 - y_0^2);$$

ce qui donne

$$\sin Y'X \int_{x'_0 y'_0}^{x'_1 y'_1} y'\,dx' = \sin YX \int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\,dx - \frac{1}{2} \sin Y'Y \frac{\sin YX}{\sin Y'X}(y_1^2 - y_0^2).$$

Cette égalité, qui subsiste toujours vraie quels que soient x_0, y_0, x_1, y_1 réels, est une identité absolue. La fonction analytique qui représente l'aire d'une conjuguée quelconque comprise entre des cordes réelles partant de deux de ses points $[x_0 y_0]$, $[x_1 y_1]$ est donc

$$\sin YX \left[\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\,dx - \frac{1}{2} \frac{\sin Y'Y}{\sin Y'X}(y_1^2 - y_0^2) \right],$$

ou, en remplaçant $\frac{\sin Y'X}{\sin Y'Y}$ par la caractéristique C,

$$\sin YX \left(-\frac{y_1^2 - y_0^2}{2C} + \int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\,dx \right).$$

La partie réelle de cette quantité représente l'aire du diamètre de la conjuguée qui divise en parties égales ses cordes réelles, et la partie imaginaire l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre.

Lorsque les limites de l'intégrale correspondent à des points où la conjuguée touche la courbe réelle, la partie $-\sin YX \frac{y_1^2 - y_0^2}{2C}$ est réelle et représente alors effectivement la différence des deux triangles, l'un ajouté, l'autre retranché au segment qui serait compris entre des parallèles au premier axe des y; de sorte que

$$\sin YX \int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\,dx,$$

dans ce cas, représente, par sa partie imaginaire, l'aire fermée comprise entre la conjuguée et le diamètre qui divise en parties égales ses cordes réelles, et par sa partie réelle l'aire comprise entre le diamètre, l'axe des x et les deux ordonnées $x = x_0$, $x = x_1$.

25. *Des intégrales prises entre des limites imaginaires.* — La définition d'une intégrale n'est pas encore complète lorsque l'on connaît

la fonction explicite ou implicite placée sous le signe $\int$, et les valeurs limites de la variable et de la fonction. Il faut en outre savoir par quelles valeurs intermédiaires passent la variable et la fonction, pour aller de leurs limites inférieures à leurs limites supérieures. La valeur de l'intégrale peut changer avec le parcours.

M. Cauchy a démontré que, les limites restant d'ailleurs les mêmes, si les valeurs intermédiaires de la variable et de la fonction changent infiniment peu, en général l'intégrale conserve la même valeur. Nous admettrons ce principe, qui n'a jamais fait question, et nous nous proposerons de chercher ce que doit dans chaque cas représenter l'intégrale, complétement définie, afin de savoir quelle en doit être la valeur. Nous commencerons par assigner, pour chaque couple des limites, une des valeurs de l'intégrale, nous verrons ensuite quelles peuvent être les autres et comment l'intégrale les acquiert.

La théorie des aires des courbes imaginaires se lie d'une façon tellement intime à celle des intégrales étudiées sous le point de vue le plus général qu'elles comportent, lorsque, pour passer de la limite inférieure à la limite supérieure, on admet toutes les suites continues possibles de valeurs de la variable indépendante, que toutes les questions si ardues qu'embrasse la seconde théorie se trouvent réduites à un degré extrême de simplicité, lorsqu'on y adapte la méthode d'interprétation dont nous venons d'établir les bases.

24. *Observation.* — On se borne habituellement, dans la notation d'une intégrale définie, à indiquer les limites entre lesquelles varie la variable indépendante; nous indiquons également les limites de la variable dépendante; l'intégrale ne sera pas encore par là complétement définie, mais elle ne pourra plus changer de valeur que lorsque le chemin décrit par le point $[xy]$, entre ses positions limites, aura changé lui-même.

Nous entendons par *limites de l'intégrale* les couples de valeurs de x et de y qui figurent les deux extrémités du chemin suivi par le point $[xy]$.

Nous supposerons toujours, dans ce qui va suivre, les axes rectangulaires.

25. *Du cas où les limites sont réelles par rapport à x.* — Si les deux points limites appartiennent à la courbe réelle et qu'un arc continu de cette courbe les réunisse, une des valeurs de l'intégrale sera la mesure de l'aire correspondante à cet arc.

Si les deux limites appartiennent à la conjuguée $C = \infty$, et qu'un arc continu de cette courbe les réunisse, une des valeurs de l'intégrale sera la mesure de l'aire correspondante à cet arc; la partie réelle de cette valeur de l'intégrale sera l'aire du diamètre conjugué des cordes parallèles aux y de la conjuguée $C = \infty$, qui se trouvera comprise entre les limites de l'intégrale, par rapport à x, et la partie imaginaire sera l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre.

Si les deux limites appartiennent à la courbe réelle, mais qu'aucune branche de cette courbe ne les réunisse, les branches de la courbe réelle sur lesquelles elles se trouveront comprendront entre elles un anneau de la conjuguée $C = \infty$. Dans ce cas, entre autres valeurs, l'intégrale représentera la somme des mesures de l'aire correspondante à l'arc compris sur la courbe réelle entre la limite inférieure de l'intégrale et le point où la branche qui contient cette limite touchera la conjuguée $C = \infty$, de l'aire de la portion du diamètre conjugué des cordes parallèles aux y de la conjuguée $C = \infty$, comprise dans l'intérieur de l'anneau considéré, de l'aire correspondante à l'arc compris sur la courbe réelle entre le point où la branche, qui contient la limite supérieure, touche la conjuguée $C = \infty$ et la limite supérieure, cette somme, augmentée ou diminuée de la moitié de l'aire intérieure imaginaire de l'anneau considéré, suivant que le point $[xy]$, pour passer de l'une des limites à l'autre, aura décrit la partie supérieure ou la partie inférieure de cet anneau. Les deux limites pourraient être séparées l'une de l'autre par plusieurs anneaux de la conjuguée et de la courbe réelle : dans ce cas l'intégrale, parmi d'autres valeurs, représenterait la somme des aires correspondantes aux branches extrêmes et au diamètre commun des différents anneaux, comme dans le cas précédent, augmentée ou diminuée de la moitié de l'aire réelle ou imaginaire de chaque anneau de la courbe réelle ou de la conjuguée $C = \infty$.

Si les deux limites appartiennent à la conjuguée $C = \infty$, et qu'elles soient séparées par un ou plusieurs anneaux de la courbe réelle et de la conjuguée elle-même, ce cas s'analysera comme le précédent.

Enfin, si l'une des limites appartient à la courbe réelle et l'autre à la conjuguée $C = \infty$, l'intégrale représentera la somme des aires correspondantes aux arcs de la courbe réelle et de la conjuguée compris entre les limites et le point où les deux courbes se touchent. Dans le cas où les deux limites seraient séparées par quelques anneaux fermés de la conjuguée et de la courbe réelle, on tiendrait compte, comme dans les cas précédents, de la présence de ces anneaux.

26. *Du cas où l'une des limites appartient à la courbe réelle et l'autre à une conjuguée qui touche la courbe réelle.* — Ce cas se ramène aisément au précédent. Si l'on imagine que l'on ait rendu l'axe des y parallèle aux cordes réelles de la conjuguée à laquelle appartient la limite imaginaire, la formule

$$\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\, dx = \frac{y_1^2 - y_0^2}{2C} + \sin Y'X \int_{x'_0 y'_0}^{x'_1 y'_1} y'\, dx,$$

montre qu'à la différence près de la partie algébrique $\frac{y_1^2 - y_0^2}{2C}$, l'intégrale aura pour valeur la somme des aires correspondantes aux arcs de la courbe réelle et de sa conjuguée qui se trouvent compris entre les limites et le point où les deux courbes se touchent, ces aires étant, bien entendu, limitées par des parallèles aux cordes réelles de la conjuguée considérée. Si les deux limites étaient séparées l'une de l'autre par quelques anneaux fermés de la conjuguée et de la courbe réelle, on tiendrait compte de cette circonstance comme dans les cas précédents.

27. *Du cas où les deux limites appartiennent à deux conjuguées différentes qui touchent la courbe réelle.* — On formera, dans ce cas une des valeurs de l'intégrale, en imaginant que le point mobile $[xy]$ décrive successivement l'arc de la conjuguée à laquelle appartient la limite inférieure, compris entre cette limite et le point où la conjuguée qui la contient touche la courbe réelle, l'arc de la courbe réelle compris entre les points où elle touche les deux conjuguées, enfin l'arc de la seconde conjuguée compris entre le point où elle touche la courbe réelle et la limite supérieure.

$[x_0 y_0]$, $[x_1\, y_1]$ désignant toujours les limites de l'intégrale, si nous appelons $[a, b]$, $[a_1\, b_1]$ les points où la courbe réelle touche les deux

conjuguées : l'intégrale $\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\,dx$ pourra se décomposer en

$$\int_{x_0 y_0}^{a\,b} y\,dx + \int_{a\,b}^{a_1 b_1} y\,dx + \int_{a_1 b_1}^{x_1 y_1} y\,dx;$$

cela posé, si nous rendons successivement l'axe des y parallèle aux cordes réelles des deux conjuguées, en désignant par $x'y'$, $x''y''$ les variables x et y transformées successivement dans les deux systèmes, par C_0 et C_1, les caractéristiques des deux conjuguées, l'intégrale $\int_{x_0 y_0}^{ab} y\,dx$ pourra être remplacée par

$$\frac{b^2 - y_0^2}{2\,C_0} + \sin Y'X \int_{x'_0 y'_0}^{a' b'} y'\,dx',$$

et l'intégrale $\int_{a_1 b_1}^{x_1 y_1} y\,dx$ par

$$\frac{y_1^2 - b_1^2}{2\,C_1} + \sin Y''X \int_{a''_1 b''_1}^{x''_1 y''_1} y''\,dx'';$$

l'intégrale $\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\,dx$ pourra donc être égalée à

$$+\frac{y_1^2}{2\,C_1} - \frac{y_0^2}{2\,C_0} + \sin Y'X \int_{x'_0 y'_0}^{a' b'} y'\,dx' + \frac{b^2}{2\,C_0} + \int_{ab}^{a_1 b_1} y\,dx - \frac{b_1^2}{2\,C_1}$$
$$+ \sin Y''X \int_{a''_1 b''_1}^{x''_1 y''_1} y''\,dx''.$$

Cette expression s'interprète aisément :

$$\frac{b^2}{2\,C_0} + \int_{ab}^{a_1 b_1} y\,dx - \frac{b_1^2}{2\,C_1}$$

représente l'aire comprise entre l'arc de la courbe réelle qui s'étend du point $[ab]$ au point $[a_1 b_1]$, les tangentes à la courbe en ces deux points et l'axe des x; par conséquent l'expression entière, à la différence près de sa partie algébrique $\frac{y_1^2}{2\,C_1} - \frac{y_0^2}{2\,C_0}$, représente l'aire comprise entre l'axe des x, les cordes réelles des deux conjuguées menées

l'une d'une des limites, l'autre de l'autre, et enfin l'arc composé qui joint ces deux limites.

28. *Du cas où les limites appartiennent à des conjuguées qui ne touchent pas la courbe réelle.* — Quand les deux limites appartiennent à une même conjuguée, et qu'un arc continu de cette courbe s'étend entre elles, l'interprétation de l'intégrale ne présente aucune difficulté.

L'identité

$$\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\,dx = \frac{y_1^2 - y_0^2}{2C} + \sin Y'X \int_{x'_0 y'_0}^{x'_1 y'_1} y'\,dx'$$

montre que l'intégrale fournit toujours, à la différence près de la quantité algébrique $\frac{y_1^2 - y_0^2}{2C}$, l'aire correspondante à l'arc de la conjuguée qui s'étend entre les deux limites de l'intégrale, cette aire étant comprise entre des parallèles aux cordes réelles de la conjuguée.

Lorsque les deux limites n'appartiennent pas à une même conjuguée, l'interprétation de l'intégrale devient plus difficile. On peut imaginer que le point mobile $[xy]$, pour passer d'une des limites à l'autre, ait suivi l'arc de la conjuguée, à laquelle appartient la limite inférieure, jusqu'au point où cette conjuguée touche l'enveloppe imaginaire, qu'il ait ensuite parcouru cette enveloppe, jusqu'au point où elle touche la conjuguée à laquelle appartient la limite supérieure, enfin qu'il ait suivi cette dernière conjuguée jusqu'au point correspondant à la limite supérieure de l'intégrale.

La première et la dernière partie de l'intégrale ainsi décomposée représentent des aires connues, mais la partie intermédiaire, engendrée par le déplacement du point mobile le long de l'enveloppe, présente plus de difficultés; nous n'en avons pas trouvé d'interprétation qui convienne à tous les cas; en sorte que, bien que nous croyions devoir dire ce que nous savons de cette question, cependant nous la laissons posée.

Il arrive très-fréquemment que les coordonnées des points de l'enveloppe imaginaire soient imaginaires, sans parties réelles, ou composées de parties réelles constantes et de parties imaginaires variables; ce

dernier cas se ramène au premier, ou en dérive par une simple transposition des axes parallèlement à eux-mêmes.

Dans le premier cas, x et y ayant la forme

$$x = \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \beta'\sqrt{-1},$$

$y\,dx$ est exprimé par $-\beta' d\beta$, de sorte que l'intégrale

$$\int y\,dx,$$

prise le long de l'enveloppe imaginaire, en fournit encore l'aire, affectée, il est vrai, du signe contraire à celui qu'elle devrait avoir en raison du sens dans lequel elle est engendrée.

Dans le second cas, si α_0, α'_0 désignent les parties réelles, constantes, des deux coordonnées de l'enveloppe imaginaire, x et y ont la forme

$$x = \alpha_0 + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha'_0 + \beta'\sqrt{-1},$$

mais

$$\int y\,dx = \int (\alpha'_0 + \beta'\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1} = \alpha'_0(x - \alpha_0) - \int \beta' d\beta,$$

de sorte que l'intégrale $\int y\,dx$ a encore un rapport très-simple avec l'aire de l'enveloppe.

Je répète que le cas que je viens d'examiner se présente très-fréquemment; les équations

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2, \quad a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2,$$
$$y = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 \pm x^2}},$$
$$y = \pm\frac{a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$
$$y = \frac{a^3}{a^2 \pm x^2},$$
$$y^3 - a^2y + a^2x = 0, \quad y^4 + x^4 = a^4,$$

en fournissent des exemples qu'on pourrait multiplier à l'infini.

Il arrivera donc fréquemment qu'on puisse encore facilement étudier la marche de l'intégrale

$$\int y\,dx,$$

lorsque le point $[xy]$ aura passé sur les conjuguées qui ne touchent plus la courbe réelle.

Mais il est clair, d'un autre côté, qu'on pourrait former à volonté des exemples d'équations où la réalité de $\frac{dy}{dx}$ n'exigeât nullement que les parties réelles de y et de x restassent constantes.

Si $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ sont quatre fonctions constamment proportionnelles, ce qui exigera simplement que $\varphi(t).\psi_1(t)$ et $\psi(t).\varphi_1(t)$ soient identiques, en posant

$$x = \varphi(t) + \psi(t)\sqrt{-1} + \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1},$$

et

$$y = \varphi_1(t) + \psi_1(t)\sqrt{-1} + \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1},$$

et éliminant t entre ces relations, on obtiendra entre x et y une équation satisfaisant aux conditions qu'on voulait s'imposer.

Cependant si l'équation $f(x, y) = 0$ a tous ses coefficients réels et représente une courbe réelle, l'enveloppe imaginaire des conjuguées touchera habituellement la courbe réelle en un point réel, car si $C = \gamma$ est une limite, dans un sens ou dans l'autre, des caractéristiques des conjuguées qui touchent la courbe réelle, de telle sorte que, par exemple, les conjuguées dont la caractéristique serait moindre que γ touchent la courbe réelle, et que celles dont la caractéristique serait plus grande que γ ne la touchent plus, la conjuguée $C = \gamma$ touchera encore la courbe réelle, et le point où se fera ce contact appartiendra aussi à l'enveloppe imaginaire. Dans ce cas, il deviendrait plus difficile de concevoir les fonctions φ, φ_1, ψ, ψ_1. En effet, si l'on transportait l'origine des coordonnées au point $[\alpha_0, \alpha'_0]$, où l'enveloppe imaginaire touche l'enveloppe réelle, l'équation nouvelle de la courbe

$$f(x + \alpha_0, y + \alpha'_0) = 0$$

aurait encore ses coefficients réels; et comme les coordonnées y et x

de l'enveloppe imaginaire deviendraient nulles en même temps, elles ne pourraient plus être exprimées que par

$$x = \varphi\,(t) + \psi\,(t)\sqrt{-1},$$
$$y = \varphi_1(t) + \psi_1(t)\sqrt{-1},$$

équations dont on pourrait remplacer le système par

$$x = \varphi(t) + \psi(t)\sqrt{-1},$$
$$\frac{x}{y} = \frac{\varphi\,(t)}{\varphi_1(t)},$$

puisqu'on suppose

$$\frac{\varphi\,(t)}{\varphi_1(t)} = \frac{\psi\,(t)}{\psi_1(t)}.$$

Or l'élimination de t entre ces deux relations ne pourrait que dans des cas exceptionnels fournir entre x et y une équation à coefficients réels, représentant une courbe réelle, parce que la réalité de x exigerait que t fût imaginaire, et qu'alors $\frac{x}{y}$ serait généralement imaginaire.

Je crois donc qu'il arrivera assez rarement, dans les cas pratiques d'équations de courbes réelles, que l'enveloppe imaginaire ait ses coordonnées composées de parties réelles et imaginaires également variables; mais il est bien loin de ma pensée d'essayer de dissimuler une difficulté véritablement embarrassante; tout au contraire, n'ayant pu résoudre seul la question, je n'en tiens que davantage à la poser.

Comme exemple d'enveloppe non carrable par l'intégrale $\int y\,dx$, je citerai celui que fournit l'équation

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

l'enveloppe imaginaire des conjuguées que représente cette équation, rapportée à des axes rectangulaires, est le cercle décrit avec un rayon égal à $r + r'$ autour du point dont les coordonnées sont $a + a'$ et $b + b'$.

Quoi qu'il en soit, on verra que la lacune que nous laissons subsister a peu d'importance relativement à la partie la plus intéressante

de la théorie qui nous occupe, et qui a rapport aux périodes des intégrales.

29. *Des périodes des intégrales.* — L'expression analytique de l'aire d'une courbe fermée prise entre deux limites quelconques, ne peut être que le terme général d'une progression par différence, dont la raison serait l'aire de la surface totale comprise dans l'intérieur de cette courbe fermée; car au chemin qui conduit le plus directement d'un point de cette courbe à un autre, on peut ajouter toujours un nombre quelconque de tours entiers faits sur sa circonférence, et chaque tour fait ajoute à l'intégrale l'aire de la surface intérieure.

En effet, l'ordonnée étant $y = \varphi(x) \pm \psi(x)$, l'intégrale prise en faisant le tour de la circonférence est, si a et b sont les valeurs limites de x,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx + \int_b^a \varphi(x)\,dx + \int_b^a -\psi(x)\,dx$$

ou

$$2\int_a^b \psi(x)\,dx,$$

c'est-à-dire deux fois l'aire de la surface comprise entre la courbe et son diamètre ou l'aire même de cette courbe.

Ainsi, $\int dx\sqrt{R^2 - x^2}$ doit avoir pour période l'aire du cercle $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ou πR^2, et, en effet,

$$\int dx\sqrt{R^2 - x^2} = \frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{2} + \frac{1}{2}R^2 \arcsin\frac{x}{R},$$

dont la période est πR^2.

L'aire indéfinie d'une courbe composée d'anneaux fermés aura de même pour périodes les aires des surfaces des différents anneaux.

Cette explication de l'existence des périodes réelles, dans les cas où la différentielle placée sous le signe $\int$ est celle de l'aire d'une courbe fermée, a dû se présenter d'elle-même et de tout temps à tous les esprits, mais sans doute on y avait renoncé, parce qu'on ne pouvait s'en servir comme de modèle pour arriver à l'interprétation des périodes.

imaginaires : nous allons voir que la théorie des aires des conjuguées imaginaires fournira, dans des termes analogues et aussi simples, l'explication des périodes imaginaires des intégrales.

Il suffit pour cela, en effet, de remarquer que si une courbe réelle a pour conjuguées des courbes fermées, la somme des éléments de l'intégrale $\int y\,dx$, correspondants à un chemin quelconque parcouru sur les branches réelles de cette courbe, peut s'augmenter, à un endroit quelconque du chemin, de la somme des éléments correspondants au parcours entier de la circonférence de la conjuguée tangente en ce point à la courbe réelle; et qu'un premier tour achevé, on peut le recommencer un nombre quelconque de fois avant de poursuivre sur la courbe réelle; en sorte que la somme des éléments de l'intégrale correspondants à un parcours entier de cette conjuguée, si elle n'est pas nulle, doit nécessairement former la période de l'intégrale indéfinie qui représente l'aire de la courbe considérée.

Habituellement, quand on part d'un point pour y revenir, la somme des éléments introduits dans l'intégrale est nulle d'elle-même; mais il n'en sera pas ainsi lorsque le parcours se fera sur une conjuguée fermée, la somme des éléments représentera l'aire de cette courbe.

En effet, lorsque le point $[xy]$ parcourra de gauche à droite la moitié supérieure de la conjuguée, les éléments ydx de l'intégrale formeront, en s'ajontant, l'aire du diamètre de la conjuguée, plus l'aire imaginaire comprise entre la conjuguée et son diamètre, au-dessus de ce dernier, et lorsque le point $[xy]$ parcourra en sens contraire la moitié inférieure de la conjuguée, les éléments de l'intégrale, ajoutés, formeront l'aire imaginaire comprise entre la conjuguée et son diamètre, au-dessous de ce dernier, moins l'aire du diamètre.

Quelle que soit l'expression trouvée de l'aire de la courbe considérée, comprise entre deux limites quelconques, elle devra donc admettre comme période la mesure de l'aire d'une quelconque des conjuguées fermées de cette courbe.

On serait en droit de conclure de là que les aires des conjuguées fermées d'une même courbe doivent être toutes égales entre elles, ou du moins que ces conjuguées se rangeront en quelques catégories dans chacune desquelles toutes les conjuguées auront même aire.

En effet, si l'intégrale ne doit avoir qu'une période imaginaire, il faudra bien que toutes les conjuguées fermées qui la donnent séparément aient même aire, et la raison qui légitime cette conclusion, doit être évidemment de nature à pouvoir s'étendre au cas où il y aurait plusieurs catégories de conjuguées fermées comprises entre des branches différentes de la courbe réelle.

Avant de fournir la démonstration directe du fait que nous venons de préjuger, nous remarquerons que les conjuguées qui ne touchent pas la courbe réelle sont nécessairement illimitées, parce que la courbe réelle n'ayant pas de tangentes parallèles à leurs cordes réelles, ces cordes s'étendent à l'infini dans les deux sens; et, en effet, toute parallèle à l'une d'elles coupe toujours la conjuguée correspondante dans le même nombre de points, puisqu'elle coupe la courbe réelle elle-même dans le même nombre de points.

Il résulte de là que les conjuguées qui ne touchent pas la courbe réelle, ne peuvent jamais être fermées ou avoir une aire finie, et que, par conséquent, le déplacement du point mobile $[xy]$ sur les conjuguées de cette espèce ne peut jamais donner lieu à la formation de périodes de l'intégrale.

Nous ne nous occuperons donc plus, dans ce qui va suivre, que des conjuguées qui touchent la courbe réelle.

Nous ferons remarquer cependant que l'enveloppe imaginaire, lorsqu'elle est fermée, peut elle-même donner naissance à la période. Ainsi, l'enveloppe imaginaire des courbes représentées par l'équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = - a^2 b^2$$

est l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

et l'intégrale qui exprime l'aire d'une quelconque de ces conjuguées a pour période l'aire πab de cette enveloppe, parce que ses coordonnées sont imaginaires sans parties réelles.

L'équation $y^4 + x^4 = a^4$ fournit un exemple analogue, mais où les deux enveloppes coïncident et fournissent la même période réelle; les deux conjuguées $C = \infty$, $C = 0$ se confondent aussi avec la courbe réelle entre les limites $x = \pm a$, $y = \pm a$, et la période imaginaire exprime l'aire commune de ces deux conjuguées.

Quant à l'équation

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

que nous avons citée plus haut, la période de l'intégrale à laquelle elle donne lieu est bien

$$\pi(r + r'\sqrt{-1})^2;$$

mais elle ne fournit plus l'aire de l'enveloppe imaginaire, qui est

$$\pi(r + r')^2;$$

cependant, comme toutes les conjuguées que représente cette équation sont illimitées dans tous les sens, la période de l'intégrale n'a de rapport qu'à l'enveloppe imaginaire.

30. *Démonstration directe de l'équivalence des aires des conjuguées fermées d'une même catégorie.* — Nous avons pu conclure l'équivalence en surface des conjuguées fermées d'une même courbe, comprises dans une même catégorie (ce seront habituellement celles qui seront tangentes aux mêmes branches de la courbe réelle), de ce que la variabilité continue de leurs aires rendrait l'intégrale $\int y\,dx$ complétement indéterminée.

Cette démonstration, suffisante pour le cas où l'intégrale déjà obtenue se trouverait n'avoir qu'une période imaginaire, serait illusoire dans la plupart des autres cas. Mais soient $[x_0 y_0]$, $[x_1 y_1]$ les points réels où l'une des conjuguées fermées touche la courbe réelle, et $[x_0 + dx_0, y_0 + dy_0]$, $[x_1 + dx_1, y_1 + dy_1]$ ceux où une conjuguée infiniment voisine touche la même courbe réelle : l'intégrale aura la même valeur, soit que le point $[xy]$ décrive l'arc de conjuguée qui s'étend du point $[x_0 y_0]$ au point $[x_1 y_1]$, ou bien l'arc de la courbe réelle qui va du point $[x_0 y_0]$ au point $[x_0 + dx_0, y_0 + dy_0]$, l'arc de conjuguée qui va du point $[x_0 + dx_0, y_0 + dy_0]$ au point $[x_1 + dx_1, y_1 + dy_1]$, et enfin l'arc de la courbe réelle qui va du point $[x_1 + dx_1, y_1 + dy_1]$ au point $[x_1 y_1]$; la partie imaginaire de l'intégrale, dans les deux cas, aura donc la même valeur: mais nous savons (nº **22**) que dans le premier cas, la partie imaginaire de l'intégrale représentera la moitié de

l'aire de la première conjuguée, et, dans le second, la moitié de l'aire de la seconde; les aires de ces deux conjuguées sont donc égales.

On tire de là une conséquence qui peut avoir de l'intérêt, c'est que la différence des aires de deux diamètres d'une même courbe dans un intervalle où les cordes sont imaginaires, est égale à la différence des aires correspondantes aux arcs de la courbe réelle, qui se terminent aux points où ces diamètres la coupent.

La démonstration précédente rend aussi raison de ce fait, qu'une intégrale, prise entre deux limites réelles appartenant à deux branches voisines de la courbe réelle, qui comprennent entre elles des conjuguées fermées, ne peut comprendre, dans sa partie imaginaire, qu'un nombre impair de fois la demi-période correspondante à l'aire de ces conjuguées, tandis que c'est le contraire lorsque les deux limites appartiennent à une même branche.

51. *Exemples.* — Avant d'aller plus loin, nous citerons quelques exemples des faits que nous venons d'établir.

Soit d'abord l'intégrale

$$\frac{b}{a}\int dx\,\sqrt{x^2-a^2},$$

qui exprime l'aire indéfinie de l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, elle est égale à

$$\frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a}-\frac{ab}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

et a pour période $\pi ab\sqrt{-1}$. Cette quantité représente bien l'aire d'une quelconque des ellipses conjuguées de l'hyperbole, car ayant toutes un système de diamètres conjugués commun avec l'hyperbole, en vertu du théorème d'Apollonius, elles ont toutes même aire que l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$.

Suivant que x est positif ou négatif, $\mathrm{L}\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ est égal au logarithme arithmétique de $\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ plus $2h\pi\sqrt{-1}$, ou au logarithme

arithmétique de $\frac{-x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+(2k+1)\pi\sqrt{-1}$, on voit donc que suivant que les limites de l'intégrale

$$\frac{b}{a}\int dx\sqrt{x^2-a^2}$$

sont prises sur une même branche ou sur les deux, la partie imaginaire de l'intégrale est $2k\frac{\pi ab\sqrt{-1}}{2}$ ou $(2k+1)\frac{\pi ab}{2}\sqrt{-1}$, elle contient un nombre pair ou impair de fois la demi-période.

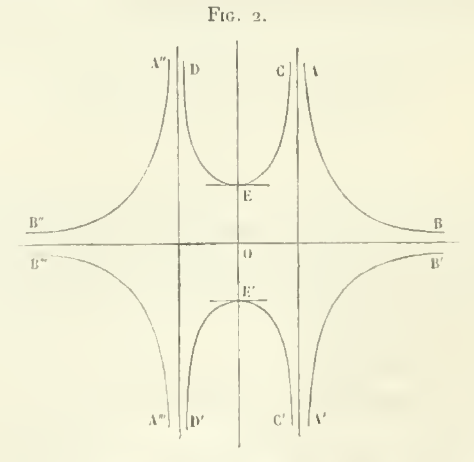
De même, $\int\frac{dx}{x}=\mathrm{L}x$ a pour période $2\pi\sqrt{-1}$, et cette quantité représente bien l'aire d'une quelconque des conjuguées de l'hyperbole équilatère $y=\frac{1}{x}$, car celle qui la touche aux extrémités de son axe transverse est le cercle dont le rayon est $\sqrt{2}$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\mathrm{L}(x+\sqrt{x^2-1})=\frac{1}{\sqrt{-1}}\operatorname{arc}\sin x,$$

a aussi pour période $2\pi\sqrt{-1}$.

L'équation $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ représente en coordonnées réelles une courbe ABA'B'A''B''A'''B''' (*fig.* 2), asymptote à l'axe des x et aux droites

Fig. 2.



$x=\pm 1$. Sa conjuguée à abscisses réelles DECD'E'C' est aussi asymp-

tote aux droites $x = \pm 1$; les autres sont fermées, leur aire commune est $2\pi\sqrt{-1}$.

$2\pi\sqrt{-1}$ est aussi l'aire de la surface comprise entre les deux branches CED, C'E'D', de sorte que la conjuguée non fermée a, si l'on peut parler ainsi, la même aire que les conjuguées fermées.

On rencontre souvent des exemples semblables de courbes réelles ou imaginaires à branches infinies, dont l'aire finie forme période de l'intégrale qui représente leur aire indéfinie.

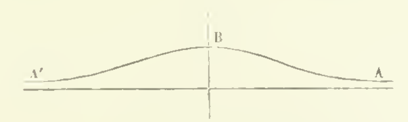
En voici quelques-uns. D'abord l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est arc sin x, dont la période est 2π.

L'équation $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ représente la courbe réelle CEDC'E'D' (*fig.* 2), la courbe imaginaire ABA'B'A''B''A'''B''', dont les abscisses sont réelles, et d'autres courbes imaginaires.

La période réelle 2π de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est l'aire de la surface comprise entre les deux branches réelles CED, C'E'D' comme la période $2\pi\sqrt{-1}$ de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ était l'aire de la surface comprise entre les deux mêmes branches imaginaires.

De même, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x$ a pour période π, qui est l'aire de la courbe ABA' (*fig.* 3), représentée par l'équation $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Fig. 3.



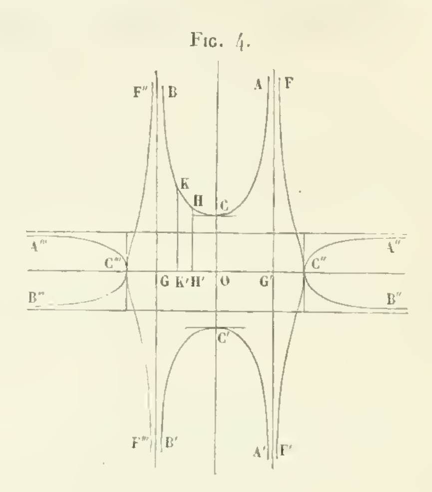
Nous terminerons par l'exemple de l'intégrale qui donne l'arc de l'ellipse,

$$\int dx \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}.$$

Cette intégrale a deux périodes, l'une réelle, l'autre imaginaire; en

effet, l'équation $y = \sqrt{\frac{1 - e^2 x^2}{1 - x^2}}$ représente (*fig.* 4) la courbe réelle ACBA′C′B′A″C″B″A‴C‴B‴, asymptote aux droites $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, symétrique par rapport aux deux axes, et ayant pour sommets les points C, C′ situés sur l'axe des y à la distance 1 de l'origine, et les points C″, C‴ situés sur l'axe des x à la distance $\frac{1}{e}$ plus grande que 1; la courbe imaginaire à abscisses réelles FC″F′F″C‴F‴, et enfin d'autres courbes imaginaires fermées.

Fig. 4.



Or l'aire comprise entre la branche réelle BCA et l'axe des x est finie, car elle est moindre que l'aire fournie entre les mêmes limites -1 et $+1$ par l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, l'aire comprise entre les deux branches réelles BCA, B′C′A′ est donc aussi finie : ce sera la période réelle de l'intégrale.

D'un autre côté, l'aire de la courbe imaginaire à abscisses réelles FC″F′ est aussi finie, car elle est plus petite que l'aire fournie entre les mêmes limites, 1 et $\frac{1}{e}$, par l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$, qui est égale à $L\left(\frac{1}{e} + \sqrt{\frac{1}{e^2} - 1}\right)$. La somme des deux aires imaginaires FC″F′ et F″C‴F‴ pourra donc former la période imaginaire de l'intégrale, période qui se retrouverait dans l'aire d'une quelconque des conjuguées fermées du lieu en question.

En partant d'un point K quelconque de la courbe réelle, pour former l'aire correspondante à l'arc KH de cette courbe, on pourrait faire suivre au point mobile $[xy]$ le chemin KCAFC″F′A′C′B′F‴C‴F″BKH, et l'intégrale des éléments ydx correspondants à ce parcours serait l'aire KK′H′H augmentée de la somme des deux périodes réelle et imaginaire [*].

32. *De la manière dont s'accroît l'intégrale.* — Le point $[xy]$ s'éloignant de sa position initiale, outre la quantité algébrique $\frac{y^2}{2C} - \frac{y_0^2}{2C_0}$, l'intégrale, à chaque instant, se compose de la portion de l'aire de la conjuguée, à laquelle appartient la limite inférieure, correspondante à l'arc de cette courbe, qui s'étend de cette limite au point de contact avec la courbe réelle; de la portion de l'aire de la courbe réelle correspondante à l'arc compris entre les points où elle touche les conjuguées qui passent par les points limites, cette aire étant d'ailleurs comprise entre les tangentes à la courbe en ces deux points; enfin de la portion de l'aire de la conjuguée, à laquelle appartient la limite supérieure, correspondante à l'arc de cette courbe, qui va du point où elle touche la courbe réelle à la limite supérieure.

Dans cette somme la première partie est fixe et les deux autres variables, la seconde est réelle, et la troisième se compose d'une partie réelle qui représente l'aire du diamètre de la conjuguée et d'une partie imaginaire qui représente l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre.

Lorsque le point $[xy]$ se déplace, la seconde partie de l'intégrale s'accroît de l'aire de la courbe réelle qui correspond à l'arc que vient de parcourir sur cette courbe le point où la touche la conjuguée qui passe au point mobile $[xy]$, et la troisième s'accroît dans ses deux par-

---

[*] Nous ne prétendons pas ici donner une démonstration à laquelle on pourrait objecter que de l'infini réel à l'infini imaginaire il n'y a pas continuité; les faits se passent comme si cette objection était sans force, et nous les citons; au reste, dans l'exemple dont il s'agit, comme dans tous les autres analogues, on pourrait, en transformant l'intégrale, substituer à une valeur infinie de y, une valeur nulle de cette variable, à une branche infinie, ayant une aire finie, un anneau fermé compris entre les mêmes limites, et la continuité reparaîtrait complète.

ties à mesure que le point $[xy]$ s'éloigne de la courbe réelle, sur la conjuguée où il se trouve.

Nous avons supposé, dans ce que nous venons de dire, que le point $[xy]$ restât sur les conjuguées qui touchent la courbe réelle; mais les faits se passent d'une manière analogue dans le cas contraire, seulement alors la partie intermédiaire de l'intégrale, celle qui correspond au parcours d'une portion de l'enveloppe imaginaire, ne représente plus toujours l'aire de cette enveloppe.

Les parties réelle et imaginaire de

$$\frac{y^2}{2C} - \frac{y_0^2}{2C_0}$$

varient avec la position du point $[xy]$; mais lorsque ce point revient à sa position initiale, quelque chemin qu'il ait suivi, $\frac{y^2}{2C}$ revient à sa valeur initiale $\frac{y_0^2}{2C_0}$, et la partie complémentaire s'évanouit; ce n'est donc pas cette partie complémentaire qui, dans ses variations, engendre les périodes soit réelles, soit imaginaires de l'intégrale.

53. *Détermination du nombre de chacune des périodes qu'on doit faire entrer dans la valeur de l'intégrale.* — Nous avons reconnu précédemment l'existence obligatoire des périodes dans tous les cas où la fonction sous le signe somme est l'ordonnée de courbes l'une réelle, les autres imaginaires, composées, l'une ou les autres d'anneaux fermés ou de branches infinies ayant des aires finies; nous venons de montrer que la partie complémentaire ne peut pas donner naissance à ces périodes : nous allons maintenant montrer de quelle manière elles s'engendrent, et quel nombre il faut en comprendre pour chacune d'elles dans la valeur de l'intégrale.

Supposons d'abord, pour simplifier, que la courbe, dont l'intégrale proposée exprime l'aire indéfinie, soit fermée et composée d'un seul anneau : l'intégrale n'aura qu'une seule période réelle, qui sera l'aire de la surface comprise dans l'intérieur de l'anneau.

D'après la théorie qui précède, cette période s'engendrera par le déplacement sur l'anneau réel du point où le touchera la conjuguée sur laquelle viendra se placer successivement le point $[xy]$; lorsque

ce point de contact aura fait le tour entier de l'anneau, son aire intérieure aura été décrite, de telle sorte que si le point $[xy]$ reprenait sa position initiale, la somme des éléments de l'intégrale se réduirait à l'aire de l'anneau, et que si le point $[xy]$ revenait en un point différent du point de départ, mais situé sur la même conjuguée, la somme des éléments de l'intégrale représenterait l'aire intérieure de l'anneau, augmentée de l'aire correspondante à l'arc parcouru sur la conjuguée.

En d'autres termes, si le point $[xy]$ s'éloignant de la courbe réelle sur une conjuguée quelconque, la partie réelle de l'intégrale pouvait s'accroître sans limite de nouveaux éléments, cette intégrale ne comprendrait pas cependant un seul des éléments différentiels de l'aire qui forme la période; cette aire ne s'introduit dans la valeur de l'intégrale que par le déplacement sur l'anneau réel du point où le touche la conjuguée mobile, sur laquelle se trouve successivement le point $[xy]$, mais autant de tours ce point de contact fait sur l'anneau réel, autant de fois il faut ajouter la période à l'aire la plus simple que représente l'intégrale en raison de ses limites.

Ce nombre s'obtiendra en comptant le nombre de fois que la caractéristique C repassera par sa valeur initiale, l'angle dont il est la tangente ayant varié dans le même sens; et ces périodes devront être prises en plus ou en moins, suivant que la variation totale de l'angle dont il vient d'être parlé se sera faite dans un sens ou dans l'autre.

Les explications qui précèdent conviendraient évidemment au cas d'une intégrale ayant plusieurs périodes réelles, et d'une courbe ayant plusieurs anneaux fermés.

Dans les cas où la période réelle serait l'aire d'une branche infinie, pour compter le nombre de périodes qu'on devrait comprendre dans la valeur de l'intégrale, quoiqu'on pût le faire directement, ce qu'il y aurait habituellement de plus simple à faire, serait de transformer cette intégrale, de manière que la fonction sous le signe $\int$ devînt l'ordonnée d'une courbe fermée et finie.

Passons maintenant aux périodes imaginaires. La question paraît plus difficile au premier abord : rien, en effet, d'analogue à ce qui vient d'être dit, ne pourra plus en rendre compte; cependant on va voir que la réponse sera tout aussi aisée à former.

Chaque période imaginaire est l'aire de l'une quelconque des conjuguées fermées appartenant à une même catégorie, de sorte que si le point $[xy]$ se déplaçait sur une conjuguée non fermée, la partie imaginaire de l'intégrale pourrait augmenter indéfiniment, sans pour cela comprendre une seule partie d'une des périodes imaginaires.

D'un autre côté, lorsque le point $[xy]$ se déplace sur une conjuguée fermée, tant qu'il n'est pas revenu à son point de départ, la période n'est pas complète, et s'il se déplace en restant sur des conjugées fermées d'une même catégorie, la période n'est complète que lorsqu'il revient, après un tour entier en un point situé sur une nouvelle conjuguée, à une distance de la courbe réelle qui fournisse la même aire imaginaire que la distance du point de départ à la même branche de la courbe réelle. Par conséquent, tant que le point $[xy]$, s'éloignant du point de départ supposé imaginaire, n'a pas passé sur la courbe réelle, l'intégrale ne contient pas encore une moitié de la période; mais si, après avoir passé sur l'une des branches de la courbe réelle qui comprennent entre elles les conjuguées fermées dont il s'agit, le point $[xy]$ arrive à l'autre branche, l'intégrale pendant ce parcours se sera augmentée d'une demi-période positive ou négative, suivant le sens dans lequel aura marché le point mobile, et suivant aussi qu'il aura parcouru les branches supérieures ou inférieures des conjuguées sur lesquelles il aura passé; chaque fois ensuite que le chemin qu'il décrira viendra alternativement raser la courbe réelle sur ses deux branches, l'intégrale s'accroîtra d'une nouvelle demi-période.

Dans le compte à faire des périodes que doit comprendre l'intégrale, les passages des coordonnées x et y du point mobile, par des valeurs réelles, jouent donc le principal rôle; à chaque passage relevé, on devra reconnaître si le point $[xy]$ a changé ou non de côté par rapport au point de contact, avec la courbe réelle, de la conjuguée sur laquelle il est venu se placer; cela fait, on comptera autant moins deux de demi-périodes qu'on aura relevé de passages alternatifs sur l'une ou l'autre branche, sans rebroussement, en négligeant tous les retours consécutifs à la même branche qui n'auraient pas été séparés par des passages sur l'autre. Si le point $[xy]$, après avoir touché une des branches, revenait sur ses pas en restant du même côté du point de contact avec la courbe réelle de la conjuguée sur laquelle il se serait trans-

porté, on défalquerait une demi-période lorsqu'il arriverait à l'autre branche.

En résumé, pour ce qui concerne les périodes imaginaires, le chemin suivi par le point $[xy]$ étant défini par une condition $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$ entre les parties réelles et imaginaires de ses coordonnées, il faudra chercher les points où ce chemin touche le lieu réel, c'est-à-dire chercher les points de rencontre des deux courbes $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, 0, y, 0) = 0$, voir comment se succèdent les contacts correspondants, si après quelques-uns d'entre eux le point $[xy]$ ne rebrousse pas chemin, et il sera ensuite toujours aisé de conclure.

34. La théorie que nous venons d'exposer ne suppose nullement que la fonction sous le signe *somme* soit donnée explicitement : si elle était définie, par rapport à la variable x, par une équation $f(x, y) = 0$, il suffirait toujours de construire la courbe $f(x, y) = 0$ et ses conjuguées pour connaître le nombre des périodes réelles ou imaginaires de l'intégrale $\int y dx$, et en obtenir la représentation par des aires définies qu'on pourrait évaluer avec toute l'approximation désirable au moyen de formules connues; enfin on pourrait encore, par les mêmes procédés généraux que nous avons indiqués plus haut, déterminer le multiple de chacune des périodes qu'on devrait comprendre dans la valeur de l'intégrale, d'après la route qu'aurait suivie le point $[xy]$ entre ses deux positions limites; on pourrait donc évaluer l'intégrale avec une approximation en quelque sorte indéfinie.

Sauf l'intégration même, cette théorie comprend donc l'étude complète des équations différentielles du premier ordre où n'entre que la variable, c'est-à-dire qui peuvent recevoir la forme $f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$.

Par exemple l'intégrale générale de l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - a^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + a^2 x = 0$$

n'aura pas de périodes, parce que l'équation

$$z^3 - a^2 z + a^2 x = 0$$

ne fournit aucun anneau fermé.

55. Lorsque l'équation différentielle qu'on se propose d'intégrer contient à la fois la fonction y et la variable indépendante x, les périodes de l'intégrale peuvent dépendre de la constante qu'introduit l'intégration. Dans ce cas les valeurs de y qui correspondent à une même valeur de x sont bien toujours les termes de diverses progressions par différence; mais les raisons de ces progressions ne sont plus des constantes absolues : elles dépendent, dans chacune des fonctions de x, que représente y, de la valeur de cette fonction qui correspond à une même valeur initiale de x. Ainsi, si l'on prend pour expression de y en x la fonction qui représente l'aire indéfinie d'une courbe fermée, qu'on différentie l'équation posée entre y et x, et qu'entre l'équation intégrale et sa différentielle on élimine un des parametres de la courbe en question, il est clair que l'intégrale générale de l'équation différentielle obtenue sera toujours la fonction de x qui représente l'aire indéfinie considérée.

Mais le paramètre éliminé y sera représenté par la constante arbitraire introduite dans l'intégration, de sorte que la période de l'intégrale ne sera plus une constante absolue; elle ne restera la même que dans une même suite de valeurs de y.

Prenons par exemple l'équation

$$y = \mathrm{CL}\frac{x}{a}$$

qui donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{C}}{x},$$

l'élimination de C fournira

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\mathrm{L}\frac{x}{a}} = \frac{\frac{dx}{x}}{\mathrm{L}\frac{x}{a}} = \frac{d\mathrm{L}\frac{x}{a}}{\mathrm{L}\frac{x}{a}};$$

et l'intégration donnera

$$\mathrm{L}y = \mathrm{L}.\mathrm{L}\frac{x}{a} + \mathrm{K} = \mathrm{L}.\mathrm{CL}\frac{x}{a},$$

d'où

$$y = \mathrm{CL}\frac{x}{a}.$$

Ainsi l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x\,\mathrm{L}\,\frac{x}{a}}$$

est simplement périodique. Mais la période de cette intégrale $\pi C\sqrt{-1}$ dépend de la constante arbitraire.

Cette constante C est l'une des valeurs de y qui correspondent à la valeur initiale de x, $x_0 = ae$, toutes les autres sont représentées par la formule

$$y_0 + n\pi y_0 \sqrt{-1}.$$

Pour déterminer les périodes de celle des fonctions y, définies par une équation

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

qui, pour une valeur x_0 de x, aurait une de ses valeurs égale à y_0 il faudrait pouvoir construire et discuter la courbe qui aurait pour ordonnée $\frac{dy}{dx}$. Pour cela on pourrait différentier l'équation proposée et éliminer ensuite y afin d'obtenir une équation entre x et $\frac{dy}{dx}$; la discussion de cette équation pourrait, dans certains cas, faire reconnaître des anneaux fermés réels ou imaginaires dans la courbe qu'elle représenterait et dans ses conjuguées.

36. Quand les coefficients de l'équation $f(x, y) = 0$ sont imaginaires, habituellement la courbe réelle n'existe plus à proprement parler; quant à l'enveloppe imaginaire des conjuguées, il n'y a pas, dans l'hypothèse, de raisons pour qu'elle disparaisse.

L'enveloppe réelle se trouvant réduite à quelques points isolés, les conjuguées doivent naturellement passer par ces points; de sorte que, pour évaluer l'intégrale

$$\int y\,dx$$

entre des limites $[x_0\, y_0]$, $[x_1\, y_1]$ appartenant à des conjuguées diffé-

rentes, on pourra imaginer que le point mobile $[xy]$ décrive la conjuguée à laquelle appartient le point $[x_0 y_0]$, et parvienne en l'un des points réels représentés dans l'équation $f(x, y) = 0$, puis se rende de là au point $[x_1 y_1]$, en suivant la conjuguée à laquelle appartient ce point $[x_1, y_1]$.

L'intégrale $\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\,dx$, à la différence près de quantités algébriques, représenterait, dans ce cas, la somme des aires correspondantes aux arcs des conjuguées auxquelles appartiennent les limites, qui iraient de ces limites à un même point réel du lieu considéré.

Quoi qu'il en soit, quand on sait carrer les courbes renfermées dans une même équation littérale, on voit qu'on sait par là même, non-seulement carrer toutes les conjuguées de ces courbes, mais encore celles qui seraient fournies par la même équation, où l'on aurait attribué aux constantes des valeurs imaginaires.

Par exemple, les aires de toutes les courbes imaginaires que peut représenter l'équation

$$(A+A'\sqrt{-1})y^2+(B+B'\sqrt{-1})xy+(C+C'\sqrt{-1})x^2+(D+D'\sqrt{-1})y$$
$$+(E+E'\sqrt{-1})x+F+F'\sqrt{-1}=0,$$

pourront s'exprimer au moyen seulement des fonctions circulaires et logarithmiques.

Ces courbes, qui en coordonnées réelles seraient représentées par des équations du quatrième degré, sont peut-être les seules courbes de cet ordre dont les aires puissent s'exprimer sans fonctions elliptiques.

37. *Rectifications.* — La rectification des courbes imaginaires serait beaucoup plus difficile que la quadrature des mêmes courbes, nous ne l'avons pas tentée ; mais voici une remarque qui présente assez d'intérêt pour mériter d'être consignée : le long du lieu qui limite la portion du plan couverte par les points imaginaires, $\frac{dy}{dx}$ est réel et représente le coefficient angulaire de la tangente à ce lieu au point $[xy]$, $dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, abstraction faite du signe $\sqrt{-1}$, qu'on remplacerait

par 1, représente donc l'élément curviligne du lieu, et

$$\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

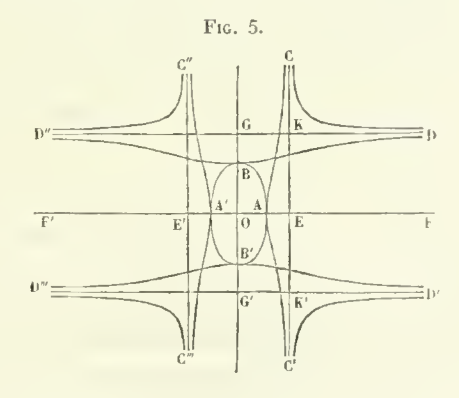
en représente un arc quelconque.

Si donc pour avoir l'arc de la courbe réelle représentée par l'équation proposée, on a posé $z = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, de sorte que l'aire de la courbe (zx) représente l'arc de la courbe (yx), l'aire de la conjuguée à ordonnées réelles de la courbe (zx), représentera proportionnellement l'arc de l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la courbe proposée.

En d'autres termes, l'arc de l'enveloppe imaginaire des conjuguées est fourni par la même intégrale qui donne l'arc de l'enveloppe réelle ou de la courbe proposée.

Prenons pour exemple celui de l'hyperbole $a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$, pour laquelle $ds = dx \sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}$. Si l'on fait $z = a\sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}$, cette équation représentera la courbe réelle ABA′B′CDC′D′C″D″C‴D‴, dont la conjuguée à abscisses réelles est CAC′C″A′C‴, et la conjuguée à ordonnées réelles DBD″D′B′D‴,

Fig. 5.



le quotient par a de l'aire CDEF représentera l'arc de l'hyperbole proposée compté à partir du sommet, et le quotient par a de l'aire BODF, représentera l'arc de l'hyperbole conjuguée compté aussi à partir de son sommet.

L'intégrale $a\int dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}$ aura d'ailleurs pour période réelle l'aire fermée ABA'B', et pour période imaginaire le quadruple de l'aire CAE ou le quadruple de l'aire DBG ou le double de l'aire d'un des deux anneaux fermés d'une conjuguée quelconque qui serait comprise entre CD et AB, C'''D''' et A'B' ou C'D' et AB', C''D'' et A'B.

La différence des arcs indéfinis des deux hyperboles conjuguées comptés à partir de leurs sommets respectifs et s'étendant jusqu'à des points indéfiniment éloignés, mais ayant leurs abscisses égales en valeur absolue, l'une réelle, l'autre imaginaire, sans partie réelle, sera représentée par

$$\left(\frac{\text{CKD}+\text{KEDF}}{a}\right)-\left(\frac{\text{GKOE}+\text{KEDF}-\text{DGB}}{a}\right);$$

$\frac{\text{GKOE}}{a}$ est égal à ea, $\frac{\text{DGB}}{a}$ est le quart de la période imaginaire de l'intégrale

$$\int dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}},$$

période que nous désignerons par B; quant à $\frac{\text{CKD}}{a}$, c'est la différence entre les longueurs infinies de l'hyperbole proposée et de son asymptote, comptées toutes deux depuis les points où $x=a$ jusqu'à des points ayant une même abscisse infinie : en effet, $\frac{\text{CKD}}{a}$ est l'arc de l'hyperbole diminué de $\frac{\text{KEDF}}{a}$; or $\frac{\text{KEDF}}{a}$ ou $\int_a^x e\,dx$ représente bien la longueur de l'asymptote comptée depuis le point $x=a$, car cette asymptote fait avec l'axe des x un angle dont le cosinus est $\frac{1}{e}$.

La différence des arcs indéfinis d'une hyperbole et de sa conjuguée est donc égale au quart de la période imaginaire de l'intégrale qui donne l'arc de la première, plus la limite de la différence des longueurs de celle-ci et de son asymptote, comptées à partir du sommet de la courbe et du sommet du rectangle construit sur ses axes, moins la distance c du centre au foyer de la même hyperbole; ou bien en

désignant par S et S′ les arcs des deux hyperboles et par l la longueur de l'asymptote,

$$S - S' = \frac{B}{4} + (S - l) - c,$$

d'où

$$\frac{B}{4} = (l - S') + c;$$

mais $l + c$ est la longueur de l'asymptote comptée à partir du centre; par conséquent, le quart de la période imaginaire de l'intégrale qui donne l'arc d'une hyperbole,

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2,$$

forme la limite de la différence entre les longueurs indéfinies de son asymptote, comptée à partir du centre et de l'hyperbole conjuguée, comptée à partir de son sommet, ces deux longueurs étant terminées en des points ayant mêmes abscisses.

Cela s'explique aisément; car le long des asymptotes considérées comme fournies par les solutions imaginaires dont la caractéristique est $\pm \frac{b}{a}$, $\frac{dy}{dx}$ est aussi réel et constamment égal à $\pm \frac{b}{a}$. En effet, si l'on pose

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' \pm \beta \frac{b}{a}\sqrt{-1},$$

il en résulte

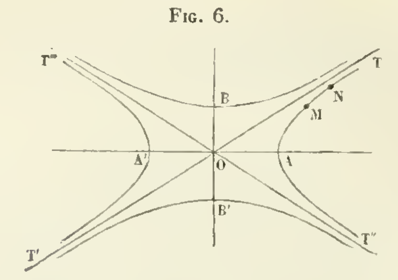
$$a^2 \alpha'^2 - b^2 \alpha^2 = - a^2 b^2 \quad \text{avec} \quad a\alpha' = \pm b\alpha.$$

Ce qui veut dire que α et α' doivent être infinis et conserver entre eux le rapport de a à b, $\frac{dy}{dx}$ se réduit donc à $\frac{b}{a}$.

Le long de l'asymptote, comme le long de l'hyperbole conjuguée, l'intégrale représente donc également le chemin parcouru; or, si pour avoir l'arc MN on en somme les éléments qui correspondraient au parcours MNTOT′B′T″OT‴BTN, on engendrera, en sus de l'arc MN,

quatre fois la différence, imaginairement représentée, des distances

Fig. 6.



BT, OT, quantité qui doit former une période de l'intégrale, puisqu'on peut recommencer un nombre quelconque de fois le parcours des deux asymptotes et de l'hyperbole conjuguée avant de rentrer sur la courbe réelle.

QUESTION DES PORISMES.

Extrait d'une Lettre de M. Breton (de Champ) à M. Liouville.

... Je trouve dans le Mémoire de M. Vincent (p. 9 à 46 du présent volume) plusieurs reproches qui, par leur nature, me paraissent exiger de ma part une réponse immédiate.

1°. Reproche d'avoir, dès le premier moment, traité en *adversaire* M. Vincent, tandis qu'il s'offrait comme *auxiliaire bénévole* (p. 14) : l'ensemble de la discussion prouve qu'en cela je ne me suis pas trompé.

2°. Reproche (bien autrement grave) d'avoir agi peu scrupuleusement en mettant en regard d'une part la traduction de M. Vincent sous sa forme primitive et *non amendée*, et d'autre part la mienne *amendée depuis ses premières observations et en partie avec leur secours*, de telle sorte que l'*avoir* du savant helléniste se trouvait figurer dans le mien (p. 14) : j'ai soumis au lecteur, en l'avertissant, *cinq documents*, savoir, le texte grec, ma première traduction, la première traduction de M. Vincent, ma traduction *amendée*, et enfin de nombreuses annotations faisant connaître, entre autres choses, le *mot à mot* qu'avait donné M. Vincent pour quelques passages de Pappus, avec ce renvoi : « pour le commentaire de cette obscure traduction... *voir* ma pre- » mière Notice (*La Science*, 3e année, p. 180, colonne 2), » et en outre *tout* ce que je devais aux observations de M. Vincent. On le voit, si quelqu'un s'est rendu coupable d'omission, ce n'est pas moi.

3°. Reproche (sur lequel insiste M. Vincent) d'avoir communiqué aux lecteurs du *Journal de Mathématiques* la réfutation d'un écrit dont ces mêmes lecteurs n'avaient point été admis à prendre connaissance (p. 14) : à ce compte que faisait-il donc lui-même en communiquant aux lecteurs du journal *La Science* ses critiques d'un écrit (les *Recherches nouvelles*) dont ces mêmes lecteurs n'avaient pas davantage été admis à prendre connaissance? Comment peut-il aujourd'hui trouver mauvais que j'aie tenu à me justifier aux yeux des lecteurs du *Journal de*

Mathématiques de critiques dont un travail que je leur avais adressé directement avait ensuite été l'objet dans un autre journal? Je n'ai fait après tout que *ramener* le débat devant un tribunal de géomètres, pour lequel l'argument *magister dixit* n'est d'aucune valeur; et ce n'est certes pas cela qui peut fâcher M. Vincent.

4°. Reproche (p. 20) d'avoir écrit ἥκιστα au lieu de ἥδιστα et mis une *virgule* au lieu d'un *point*, et (p. 38) d'avoir *supprimé* le mot δέκα : j'ai déclaré dans une note, au commencement des *Recherches nouvelles*, que je suivais le texte de Halley (donné, comme on le sait, d'après deux manuscrits de la Bibliothèque Savilienne), et pour ces trois détails, j'ai suivi fidèlement ce texte. De plus, il y a certainement ἥκιστα dans le manuscrit sur lequel Commandin a fait sa version; il y a une *virgule* et non un *gros point* dans le manuscrit n° 2440. Quant au mot δέκα, que M. Vincent n'a pas traduit, tout en se plaignant de sa suppression, il faut, si on veut le rétablir, le faire suivre de πλήθη sous-entendu.

Je ne veux pas rentrer dans la discussion. Le lecteur n'aura pas manqué de s'apercevoir qu'en définitive M. Vincent n'a rien sauvé de ce qu'il a voulu défendre. Je ne dirai même rien de sa nouvelle interprétation du passage qui précède le théorème dit de Pappus, Pappus lui-même y répondant par ce qui suit immédiatement son énoncé général. En ce qui concerne les expressions grecques que j'aurais, à en croire M. Vincent, détournées de leur sens général ou spécial, j'ai pour moi le dictionnaire, la manière dont ces expressions sont employées dans le texte, et avec cela le *sentiment des choses géométriques*. Enfin on trouvera les réponses aux interpellations qui me sont adressées (p. 21 et 41) dans les *Recherches nouvelles* (Commentaire, §§ VII, XIV et XV), et, en les y trouvant, en considérant aussi combien de fois déjà j'ai pu reprocher à mon savant adversaire de ne m'avoir pas *lu*, on se demandera peut-être ce que signifie sa prétention de m'avoir *réfuté* (*voyez* le titre de son Mémoire).

Pour finir, je m'en tiens purement et simplement à ce que j'ai donné dans les *Recherches nouvelles* et dans les deux suppléments qui y font suite, et je déclare m'en rapporter entièrement au jugement des géomètres.

SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE MULTIPLE;

Par M. J. LIOUVILLE.

Je me suis beaucoup occupé, il y aura bientôt trente ans, de la détermination ou de l'abaissement de diverses classes d'intégrales définies multiples, à l'occasion du calcul des différentielles à indices quelconques qui offre pour cela de grands secours. Mais entraîné depuis vers d'autres recherches plus importantes, j'ai négligé de publier la plupart des résultats que j'avais obtenus. Plusieurs pourtant avaient de l'intérêt. Je me propose donc d'y revenir et de les présenter successivement à nos lecteurs, à mesure que je trouverai quelque page à remplir dans ce journal. Je les tirerai de mes papiers, tels qu'ils y sont inscrits, sans trop m'inquiéter si quelqu'un ne m'a pas prévenu. Dans ce genre un peu vague, on est souvent ramené, sans le savoir, à des conclusions déjà connues, qu'un simple changement de variables couvre quelquefois d'une apparence de nouveauté. Mettant donc ici de côté toute prétention d'inventeur, je ne veux écrire que pour nos jeunes étudiants, et peu leur importe à qui revient au fond telle ou telle formule sur laquelle je les exercerai : si plus tard ils reconnaissent qu'elle appartient à tel ou tel auteur, ils la lui rendront.

La formule que je vais leur donner aujourd'hui contient une fonction $f(x)$ arbitraire, mais qui, bien entendu, doit être telle, que nos intégrales aient une valeur finie et offrent un sens précis comme sommes d'éléments.

Je cite textuellement l'énoncé que je retrouve, avec la date du 15 mai 1831.

« Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ des variables qui croissent de 0 à 1, et μ_1,
» $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$ des constantes positives, ou du moins à partie réelle
» positive. Posons

$$P = (1-\alpha_1)^{\mu_1-1}(1-\alpha_2)^{\mu_2-1}\ldots(1-\alpha_n)^{\mu_n-1}$$

» et

$$Q = \alpha_2^{\mu_1}\alpha_3^{\mu_1+\mu_2}\alpha_4^{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\cdots\alpha_n^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1}}.$$

» Enfin considérons l'intégrale multiple

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)\,\mathrm{PQ}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_n.$$

» que je désignerai par A. Je dis que cette intégrale multiple est ré-
» ductible (quelle que soit la fonction f) à une intégrale simple, en
» sorte que

$$(1)\qquad A = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)\ldots\Gamma(\mu_n)}{\Gamma(\sigma)}\int_0^1 f(\alpha)(1-\alpha)^{\sigma-1}d\alpha,$$

» où

$$\sigma = \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n.$$

» Cela est aisé à vérifier en développant la fonction $f(x)$ en série
» suivant les puissances de x. »

Je n'ai pas sans doute besoin d'ajouter que le signe Γ est celui de Legendre pour l'intégrale eulérienne de seconde espèce.

Quand $n=2$, notre formule réduit une intégrale double à une intégrale simple. Elle consiste alors dans l'équation

$$(2)\quad \int_0^1\int_0^1 f(\alpha\beta)(1-\alpha)^{\mu-1}\beta^{\mu}(1-\beta)^{\nu-1}d\alpha\,d\beta = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^1 f(z)(1-z)^{\mu+\nu-1}dz.$$

Soit, par exemple,

$$f(x) = x^{\rho-1},$$

ρ étant comme μ et ν une constante positive ou à partie réelle positive. Il faudra que

$$\int_0^1\int_0^1(\alpha\beta)^{\rho-1}(1-\alpha)^{\mu-1}\beta^{\mu}(1-\beta)^{\nu-1}d\alpha\,d\beta = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^1 z^{\rho-1}(1-z)^{\mu+\nu-1}dz.$$

Or cette égalité a lieu en effet. Car par une formule d'Euler on a

$$\int_0^1 z^{\rho-1}(1-z)^{\mu+\nu-1}dz = \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\rho+\mu+\nu)},$$

en sorte que le second membre a pour valeur

$$\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho+\mu+\nu)},$$

et c'est bien là aussi la valeur du premier membre qui n'est autre que le produit des deux intégrales

$$\int_0^1 \alpha^{\rho-1}(1-\alpha)^{\mu-1}\,d\alpha$$

et

$$\int_0^1 \beta^{\rho+\mu-1}(1-\beta)^{\nu-1}\,d\beta,$$

respectivement égales à

$$\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\rho+\mu)}$$

et à

$$\frac{\Gamma(\rho+\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho+\mu+\nu)}.$$

Ceci suffirait pour établir la formule (2), si l'on voulait développer $f(x)$ en série sous la forme

$$f(x)=\sum B_\rho\, x^{\rho-1};$$

et la même méthode pourrait être appliquée à la formule générale (1). Mais voici une démonstration plus rigoureuse et tout aussi simple.

En posant

$$\beta=\frac{z}{\alpha}$$

l'intégrale

$$\int_0^1\int_0^1 f(\alpha\beta)(1-\alpha)^{\mu-1}\beta^{\mu}(1-\beta)^{\nu-1}\,d\alpha\,d\beta$$

se change dans la suivante :

$$\int_0^1 d\alpha\int_0^{\alpha} f(z)(1-\alpha)^{\mu-1}z^{\mu}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu-1}\frac{dz}{\alpha^{\mu+1}}.$$

Or, en regardant α et z comme deux coordonnées rectangulaires dans un plan, et l'intégrale double que je viens d'écrire comme l'expression d'un volume, on voit qu'elle peut être remplacée par celle-ci :

$$\int_0^1 f(z) z^\mu dz \int_z^1 (1-\alpha)^{\mu-1} \left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu-1} \frac{d\alpha}{\alpha^{\mu+1}},$$

où l'ordre des intégrations est interverti. Dès lors tout se réduit à prouver que

$$z^\mu \int_z^1 (1-\alpha)^{\mu-1}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu-1} \frac{d\alpha}{\alpha^{\mu+1}} = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}(1-z)^{\mu+\nu-1}.$$

Or il suffit pour cela de poser

$$\alpha = \frac{z}{1-(1-z)t};$$

les limites pour la nouvelle variable t seront 0 et 1 ; on aura

$$1-\alpha = \frac{(1-z)(1-t)}{1-(1-z)t}, \quad 1-\frac{z}{\alpha} = (1-z)t, \quad d\alpha = \frac{z(1-z)\,dt}{[1-(1-z)t]^2},$$

par suite

$$z^\mu \int_z^1 (1-\alpha)^{\mu-1}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu-1} \frac{d\alpha}{\alpha^{\mu+1}} = (1-z)^{\mu+\nu-1} \int_0^1 t^{\nu-1}(1-t)^{\mu-1}dt,$$

ce qui est bien l'équation demandée, vu la formule d'Euler rapportée plus haut.

Pour démontrer la formule générale (1), il suffit d'appliquer plusieurs fois la formule de réduction (2). Considérons le cas de $n=3$, où

$$A = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(1-\alpha_1)^{\mu_1-1}(1-\alpha_2)^{\mu_2-1}(1-\alpha_3)^{\mu_3-1}\alpha_2^{\mu_1}\alpha_3^{\mu_1+\mu_2}d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3.$$

Ne portons notre attention que sur les deux premières variables α_1, α_2 et appliquons à l'intégrale double qui les concerne la réduction indiquée par la formule (2). Nous réduirons l'intégrale triple A à une intégrale double, savoir

$$A = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1+\mu_2)}\int_0^1\int_0^1 f(z\alpha_3)(1-z)^{\mu_1+\mu_2-1}\alpha_3^{\mu_1+\mu_2-1}(1-\alpha_3)^{\mu_3-1}dz\,d\alpha_3.$$

Mais celle-ci à son tour est réductible de la même manière. On a donc

$$A = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1+\mu_2)} \cdot \frac{\Gamma(\mu_1+\mu_2)\Gamma(\mu_3)}{\Gamma(\mu_1+\mu_2+\mu_3)} \int_0^1 f(\alpha)(1-\alpha)^{\mu_1+\mu_2+\mu_3-1}\,d\alpha,$$

d'où, finalement,

$$A = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)\Gamma(\mu_3)}{\Gamma(\mu_1+\mu_2+\mu_3)} \int_0^1 f(\alpha)(1-\alpha)^{\mu_1+\mu_2+\mu_3-1}\,d\alpha,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On descendra de la même manière du cas de $n=4$ à celui de $n=3$, du cas de $n=5$ à celui de $n=4$, et ainsi de suite. La démonstration est donc complète.

Nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire d'insister sur les applications de la formule générale (1). Bornons-nous à faire observer que dans le cas particulier où l'on prend pour $f(\alpha)$ une fonction de la forme

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^{\mu-1}}{(1+g\alpha)^s},$$

μ, g, s étant des constantes, il vient

$$A = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)\ldots\Gamma(\mu_n)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 \frac{\alpha^{\mu-1}(1-\alpha)^{\sigma-1}\,d\alpha}{(1+g\alpha)^s}.$$

Dans ce cas, l'intégrale A, savoir

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \frac{\alpha_1^{\mu-1}\alpha_2^{\mu+\mu_1-1}\ldots\alpha_n^{\mu+\mu_1+\ldots+\mu_{n-1}-1}(1-\alpha_1)^{\mu_1-1}\ldots(1-\alpha_n)^{\mu_n-1}\,d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_n}{(1+g\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^s},$$

se ramène donc à une intégrale trinôme ou à la *série générale* de Gauss. Cette intégrale trinôme

$$\int_0^1 \frac{\alpha^{\mu-1}(1-\alpha)^{\sigma-1}\,d\alpha}{(1+g\alpha)^s}$$

s'exprime quelquefois sous forme finie; cela arrive, par exemple, quand on a

$$s = \mu + \sigma:$$

en posant en effet

$$\alpha = \frac{1 - t}{1 + gt},$$

on trouve sans peine que

$$\int_0^1 \frac{\alpha^{\mu-1}(1-\alpha)^{\sigma-1}\,d\alpha}{(1+g\alpha)^{\mu+\sigma}} = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\mu+\sigma)(1+g)^{\mu}}.$$

De là pour A, dans les conditions indiquées, la valeur fort simple

$$\mathrm{A} = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu_1)\ldots\Gamma(\mu_n)}{(1+g)^{\mu}\,\Gamma(\mu+\mu_1+\ldots+\mu_n)}.$$

Ainsi, pour $n = 2$, on a l'intégrale double

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\alpha_1^{\mu-1}\,\alpha_2^{\mu+\mu_1-1}(1-\alpha_1)^{\mu_1-1}(1-\alpha_2)^{\mu_2-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2}{(1+g\,\alpha_1\,\alpha_2)^{\mu+\mu_1+\mu_2}}$$

dont la valeur est, d'apres nos calculs,

$$\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu_1)\,\Gamma(\mu_2)}{(1+g)^{\mu}\,\Gamma(\mu+\mu_1+\mu_2)}.$$

SUR LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT
QUI EST TRANSMISE A UN CORPS PAR LE CHOC D'UN POINT MASSIF QUI VIENT LE FRAPPER DANS UNE DIRECTION DONNÉE;

Par M. POINSOT.

---

1. Soient M la masse du corps, G son centre de gravité, et concevons mené par ce centre le plan perpendiculaire à l'un de ses trois axes principaux. On suppose qu'un point massif dont la masse est m, vienne dans ce plan, avec une vitesse donnée v, choquer le corps M au point C, suivant une direction perpendiculaire à la ligne CG; et l'on demande quelle est la quantité de mouvement qui passera dans le corps M en vertu de ce choc.

Il est clair d'abord que le point massif m, qui avant le choc a la vitesse v, n'aura plus après le choc qu'une certaine vitesse u telle, qu'il cessera d'agir sur M, parce que le point C de contact se dérobera devant lui avec la même vitesse. Donc, par le choc, m aura perdu la quantité de mouvement $m(v-u)$; par conséquent M l'aura gagnée, et $m(v-u)$ sera la quantité de mouvement transmise à M.

Il ne s'agit donc que de trouver la vitesse u qui reste à m après le choc. Or, tant que m agit sur M, ces deux corps sont nécessairement en contact; et puisqu'ils sont en contact, on peut supposer que durant cette action, quelque courte qu'elle soit, ils sont attachés l'un à l'autre. Donc la vitesse u que prend le point C du corps M est la même que prendrait le point C d'un système composé de M et m, et qui serait frappé en C par une force mv qui passerait tout entière dans ce système. Or il est bien facile de trouver cette vitesse.

Et en effet, soit g le centre de gravité du système de M et m, nommons x la distance CG, et faisons $\frac{m}{M} = n$; on aura pour l'expression des lignes gG et gC,

$$gG = \frac{nx}{n+1} \quad \text{et} \quad gC = \frac{x}{n+1}.$$

Désignons par MK^2 le moment d'inertie du corps M par rapport à l'axe principal que l'on considère en son centre G, et par $(M+m)K'^2$ celui du système relatif à son centre g; on aura, comme on sait,

$$(M+m)K'^2 = MK^2 + M\left(\frac{nx}{n+1}\right)^2 + m\left(\frac{x}{n+1}\right)^2,$$

d'où l'on tire

$$K'^2 = \frac{(n+1)K^2 + nx^2}{(n+1)^2}.$$

Or la force mv, appliquée au système $M+m$, à la distance $\frac{x}{n+1}$ de son centre de gravité g, donne d'abord à tous les points du système une commune vitesse $\frac{mv}{M+m}$ ou $\frac{nv}{n+1}$; et ensuite cette même force mv fait tourner le système autour de g avec une vitesse angulaire θ, qu'on trouve en faisant

$$mv \cdot \frac{x}{n+1} = (M+m)K'^2\theta :$$

ce qui donne $\theta = \frac{nvx}{(n+1)^2 K'^2}$; et par conséquent $\frac{nvx^2}{(n+1)^3 K'^2}$ pour la vitesse du point C en vertu de cette rotation θ.

En réunissant ces deux vitesses du point C, lesquelles ont lieu dans le même sens, on a donc, pour la vitesse totale u de ce point C,

$$u = \frac{nv}{n+1} + \frac{nvx^2}{(n+1)^3 K'^2};$$

ou bien, en mettant pour K'^2 sa valeur précédente exprimée en K,

$$u = nv \cdot \frac{K^2 + x^2}{(n+1)K^2 + nx^2},$$

et par conséquent

$$v - u = \frac{vK^2}{(n+1)K^2 + nx^2};$$

d'où l'on tire enfin pour la quantité de mouvement $m(v-u)$ qui passe dans M par le choc du point massif m,

$$m(v-u) = mv \cdot \frac{K^2}{(n+1)K^2 + nx^2}.$$

2. On voit, par cette expression, que la quantité de mouvement transmise à M diminue quand x augmente, et qu'elle devient nulle si le choc a lieu à une distance infinie du centre de gravité. Si $x = 0$, c'est-à-dire si le choc se fait au centre de gravité G, la force transmise est $\frac{mv}{n+1}$ comme cela doit être : c'est la plus grande valeur de $m(v-u)$.

Supposons maintenant qu'on regarde m et v comme variables, mais de manière que le produit mv reste toujours le même. On peut demander comment m et v doivent varier avec la distance x, pour que la quantité de mouvement transmise à M soit toujours la même. Or, dans l'expression de cette quantité, le numérateur $mv\mathrm{K}^2$ étant constant, il faut que le dénominateur $(n+1)\mathrm{K}^2 + nx^2$ le soit aussi ; et par conséquent, en effaçant la quantité K^2 qui est constante, il faut qu'on ait

$$n(\mathrm{K}^2 + x^2) = \text{const.} = \mathrm{B}^2,$$

ce qui donne $m = \frac{\mathrm{MB}^2}{\mathrm{K}^2 + x^2}$, et par conséquent

$$v = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{K}^2 + x^2)}{\mathrm{MB}^2},$$

en désignant simplement par P le produit constant mv.

Ainsi m et v doivent varier comme ces deux fonctions réciproques de x, si l'on veut que le point massif m animé de la vitesse v fasse passer dans le corps M la même quantité de mouvement, quelle que soit la distance x du point C où il choque le corps M.

Si, au lieu des constantes B^2 et P on en veut prendre deux autres relatives aux données de la question, soient m_0 et v_0 la masse et la vitesse de m pour le point C qui répond à $x = 0$, on aura

$$m_0 = \frac{\mathrm{MB}^2}{\mathrm{K}^2} \quad \text{et} \quad v_0 = \frac{\mathrm{PK}^2}{\mathrm{MB}^2},$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{B}^2 = \frac{m_0 \mathrm{K}^2}{\mathrm{M}} \quad \text{et} \quad \mathrm{P} = m_0 v_0,$$

et par conséquent,

$$m = m_0 \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{K}^2 + x^2} \quad \text{et} \quad v = v_0 \cdot \frac{\mathrm{K}^2 + x^2}{\mathrm{K}^2}$$

pour les expressions des deux variables m et v.

Ainsi à la distance x du centre de gravité G, il faut donner à la masse m du marteau la valeur $m_0 \cdot \frac{K^2}{K^2 + x^2}$, et à la vitesse v de ce marteau la valeur $v_0 . \frac{K^2 + x^2}{K^2}$, si l'on veut que le choc du marteau fasse toujours passer dans M la même quantité de mouvement

$$m_0 v_0 \cdot \frac{M}{M + m_0},$$

c'est-à-dire communique au centre de gravité G de M la même vitesse constante

$$v_0 \cdot \frac{m_0}{m_0 + M}.$$

3. Mais si l'on transmet ainsi à ce centre G la même vitesse à quelque distance x que l'on frappe, on ne communique point au corps la même vitesse de rotation autour de ce centre ; car cette vitesse θ dépend de x, comme on peut le voir par l'expression précédente de θ, qui est

$$\theta = \frac{m}{M} \cdot \frac{vx}{(n+1)K^2 + nx^2}$$

et qui, en mettant pour m, v et n leurs valeurs précédentes, devient

$$\theta = m_0 v_0 \cdot \frac{x}{K^2 (M + m_0)},$$

et par conséquent est proportionnelle à la distance x du centre G où le coup est appliqué ; comme il est clair que cela doit être.

4. Supposons que la masse du point m soit infiniment petite, et la vitesse v infiniment grande, de manière que mv soit une quantité finie $= P$: on trouvera que la force $m(v - u)$ qui est transmise à M devient, à cause de $u = 0$,

$$m(v - u) = P,$$

c'est-à-dire égale à la force mv elle-même qui se transmet ainsi tout entière au corps M.

C'est par cette hypothèse qu'on peut se faire une idée naturelle de ce qu'on appelle une force imprimée à un corps. On peut la considérer

comme la percussion d'un corpuscule infiniment petit qui vient choquer le corps avec une vitesse infinie. Comme ce corpuscule ajouté au corps n'en augmenterait point la masse finie M, on peut supposer qu'après le choc il lui reste attaché, et qu'ainsi toute la force a passé dans le corps M.

On conçoit par là cette loi de la force proportionnelle à la vitesse. Car si l'on regarde cette force comme provenant de plusieurs corpuscules égaux qui viennent successivement frapper le corps avec des vitesses égales et infinies, on voit que le premier ne donnant au corps m en repos qu'une vitesse finie, le second corpuscule qui arrive avec une vitesse infinie a encore la même action sur M que si ce corps était en repos, et que par conséquent il y fait passer une nouvelle vitesse finie égale à la première, et ainsi de suite.

5. Supposons maintenant que le corps M soit posé sur un appui fixe placé en F à la distance h du centre de gravité G. Si ce corps était frappé avec une certaine force Q tombant en F à angle droit sur l'appui, il est évident que cette percussion directe sur l'obstacle aurait pour mesure la force Q elle-même.

Mais si, avec cette même force et dans une direction parallèle, on frappe le corps en un autre point C pris sur GF à la distance x du centre G, la percussion sur l'obstacle ne sera plus la même; elle dépendra de la distance x, et en sera une certaine fonction qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, regardant le point F comme un *centre de percussion*, je cherche sur-le-champ le point O qui lui répond comme *centre spontané* de rotation; et j'ai pour déterminer sa distance $OG = a$, l'équation $ah = K^2$, ce qui donne $a = \frac{K^2}{h}$.

Cela posé, j'imagine que la force Q qui frappe en C à la distance x du centre G, soit décomposée en deux autres parallèles, l'une P qui frappe en F, l'autre R qui frappe en O. Il est clair que cette dernière composante qui tombe en O ne peut produire aucune percussion sur l'appui qui est en F; car le point F est un centre spontané de rotation par rapport au point O regardé comme un centre de percussion. Il ne reste donc pour frapper l'appui fixe que la composante P qui tombe directement sur cet appui F.

Or, par la composition des forces, on a

$$Q:P::a+h:a+x,$$

ce qui donne, en mettant pour a sa valeur $\frac{K^2}{h}$,

$$P = Q\cdot\frac{K^2+hx}{K^2+h^2}.$$

Telle est, sur un appui fixe placé à la distance h du centre de gravité d'un corps, la percussion exercée par une force donnée Q qui frappe à la distance x du même centre.

6. On voit, par cette expression, qu'avec une même force Q, appliquée à une distance convenable, on peut produire sur un obstacle fixe une percussion de telle grandeur et de tel sens qu'on voudra; ce qui paraît un théorème assez digne de remarque.

Si l'on suppose $x = h$, on a $P = Q$, comme il est clair que cela doit être, puisqu'alors la force Q frappe directement sur l'appui même.

Si l'on suppose $x = -a = -\frac{K^2}{h}$, on a $P = 0$, c'est-à-dire qu'au point O la force appliquée ne ferait sentir au point d'appui F aucune percussion, ce qui est aussi évident.

En faisant $a+x = y$, et désignant par l la ligne $a+h$, l'expression précédente de P devient simplement

$$P = Q\cdot\frac{y}{l}.$$

D'où l'on voit qu'à partir du point O comme origine des distances y où le corps M est frappé par la force Q, la percussion P exercée en F augmente uniformément comme l'ordonnée d'une ligne droite, et qu'elle a les mêmes valeurs à droite et à gauche de cette origine, mais avec des signes contraires.

7. Il est sans doute tres-remarquable qu'à l'aide d'un corps libre M posé sur un appui on puisse, en n'employant qu'une même force Q, produire sur cet appui une percussion non-seulement plus grande que la force Q elle-même, mais plus grande que toute percussion don-

née. Mais ce théorème suppose que la force Q est transmise tout entière au corps M à quelque distance qu'elle soit appliquée. Il ne faudrait donc pas conclure qu'avec un même coup de marteau de masse m et de même vitesse v, on puisse produire sur un obstacle telle percussion qu'on voudra, à l'aide d'un corps interposé M : car la force mv de ce marteau ne se transmet qu'en partie au corps M, et cette partie diminue quand la distance où l'on frappe augmente.

Mais si à chaque distance x on change de marteau, en prenant la masse m réciproque à $K^2 + x^2$, et la vitesse v proportionnelle à la même fonction, la quantité de mouvement transmise à M sera toujours la même, comme nous l'avons dit plus haut (2). En désignant donc par q cette quantité constante de mouvement qu'on imprime ainsi à M, on aurait pour la percussion P exercée contre l'appui F,

$$P = q \cdot \frac{K^2 + hx}{K^2 + h^2}.$$

D'où l'on voit que par le choc d'un point massif d'une masse et d'une vitesse convenables et pourtant toujours telles, que leur produit mv reste le même (ce qu'on peut regarder comme un même coup de marteau), on peut, au moyen d'un corps interposé M, produire sur un obstacle fixe une percussion donnée aussi grande qu'on voudra.

8. Si l'on fait $x = h$, on trouve $P = q$, et pourtant, comme alors le choc est direct, on devrait avoir $P = mv = Q$. Mais il faut remarquer que, dans toute cette analyse, on suppose qu'après le choc du point m contre le corps M, la force mu qui reste au marteau n'est plus employée, en sorte que l'on ne compte sur le point F que la seule percussion qui proviendrait du mouvement q transmis à m.

9. Si l'on suppose que m s'attache à M, et qu'on demande la percussion produite en f à la distance h du centre G de M, on trouvera par un calcul facile

$$P = mv \cdot \frac{K^2 + hx}{K^2 + h^2 + n(x - h)^2}.$$

Cette formule est facile à vérifier d'ailleurs en cherchant la force P avec laquelle un corps composé de M et du point massif m, animé par une force mv appliquée à la distance x du centre G de M, et par con-

séquent à la distance $\frac{x}{n+1}$ du centre g de $m+M$, frapperait un point f situé à la distance h du centre G, et par conséquent à la distance $h-\frac{nx}{n+1}$ du centre g de $M+m$.

10. Si l'on fait $x=h$, c'est-à-dire si l'on suppose que le choc a lieu au point f lui-même, on trouve $P=mv$, comme cela doit être.

Si x augmente depuis $x=0$ jusqu'à $x=h$, le numérateur de la fraction augmente et le dénominateur diminue, et par cette double raison la percussion P augmente depuis $P=\frac{K^2.mv}{K^2+(n+1)h^2}$ jusqu'à $P=mv$.

Si l'on fait $x=-\frac{K^2}{h}$, on a $P=0$, comme cela doit être; car alors le point m frappe en un point ou centre de percussion O dont le point f est le centre spontané; d'où il résulte que le point f ne peut ressentir aucune percussion du coup qui frappe en O.

Si $x=\infty$, P est encore nulle. Il y a donc un point qui répond au maximum de P.

11. Si l'on cherche la distance x qui répond au maximum de P, on trouve

$$x^2+\frac{2K^2}{h}x-\left[K^2+(K^2+h^2)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=0,$$

ou, en mettant pour n sa valeur $\frac{m}{M}$,

$$x^2+\frac{2K^2}{h}x-\left[2K^2+h^2+\frac{M}{m}(K^2+h^2)\right]=0,$$

ou bien, en faisant $ah=K^2$ et $a+h=l$,

$$x^2+2ax-\left(hl.\frac{m+M}{m}+ah\right)=0,$$

ce qui donne pour x deux valeurs qui répondent à des points situés à droite et à gauche à égales distances du point O qui répond à $x=-a$.

12. Prenons pour exemple le cas de $n=1$, ou de $m=M$, et de $h=K$, ce qui met l'appui f sous le centre de la plus grande percussion

que le corps libre M pourrait produire en tournant autour de son centre de gravité G.

On aura, pour déterminer la valeur de x qui répond au maximum du choc exercé sur le point f en vertu du coup de marteau mv, l'équation

$$x^2 + 2Kx - 5K^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = -K \pm K\sqrt{6}.$$

Si l'on met cette valeur de x dans l'expression de la percussion P, on aura

$$P = mv . \frac{\pm\sqrt{6}}{12 \mp 4\sqrt{6}}.$$

Or $\sqrt{6}$ est $> 12 - 4\sqrt{6}$; donc pour la première valeur de x, on a $P > mv$: cette valeur de x répond au maximum de P. Pour l'autre valeur de x, P est négative et moindre que mv: cette valeur de x répond au maximum *négatif* de P.

En regardant P comme l'ordonnée d'une courbe dont x est l'abscisse, cette courbe est une ligne du troisième ordre dont l'équation est dans l'exemple ci-dessus :

$$P = mv . \frac{K^2 + Kx}{2K^2 + (x - K)^2},$$

cette courbe coupe l'axe des x, au point qui répond à $x = -K$, de sorte que P est nulle en ce point.

Quand $x = K$, on a $P = mv$. Quand $x = \pm\infty$, $P = \pm 0$, et l'axe des x est asymptote de la courbe, à droite et à gauche.

Si l'on met l'origine des distances au point qui répond à $x = -K$, on aura en faisant $x + K = y$,

$$P = \frac{Ky}{y^2 - 4Ky + 6K^2},$$

et pour les valeurs de y qui répondent aux deux maxima de P,

$$y = \pm K\sqrt{6}.$$

La première distance $y = K\sqrt{6}$ répond à une percussion P plus grande

que mv, et par conséquent plus grande que si l'on eût frappé directement l'appui f avec la même force mv. La seconde $y = -\mathrm{K}\sqrt{6}$ répond à une percussion P négative et qui par conséquent supposerait que l'appui f résiste alors dans le sens contraire ; et cette percussion négative est $< mv$. Ainsi, pour causer avec un même coup de marteau mv de masse $m = \mathrm{M}$ la plus grande percussion possible sur l'appui f au moyen d'un corps intermédiaire libre M, posé sur le point f, le centre de gravité G étant à une distance K de ce point, il faut frapper non au point f lui-même, mais au delà de ce point f, à une distance $\mathrm{K}\sqrt{6} - 2\mathrm{K}$.

Si dans l'expression générale de P qui est

$$\mathrm{P} = mv.\frac{\mathrm{K}^2 + hx}{\mathrm{H}^2 + h^2 + n(x-h)^2},$$

on suppose m infiniment petit et v infini, de sorte que mv soit égale à la quantité finie Q, on a (à cause de $n = 0$)

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q}.\frac{\mathrm{K}^2 + hx}{\mathrm{K}^2 + h^2},$$

ce qui s'accorde en entier avec ce que nous avons trouvé précédemment.

SUR

LA MANIÈRE DE RAMENER A LA DYNAMIQUE DES CORPS LIBRES, CELLE DES CORPS QU'ON SUPPOSE GÊNÉS PAR DES OBSTACLES FIXES;

Par M. POINSOT.

1. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des corps parfaitement libres. Mais en mécanique on considère souvent des corps qui n'ont d'autre liberté que celle de tourner sur quelque point ou axe fixe, ou de glisser sur un plan *inébranlable*, etc.; et l'on pourrait croire que dans cette nouvelle hypothèse la solution des problèmes demande de nouveaux principes. Mais on va voir que les précédents nous suffisent, et que notre théorie s'applique de la manière la plus directe, et même la plus *naturelle* à ces cas singuliers où l'on suppose quelque obstacle fixe qui gêne les mouvements du corps.

2. Et en effet, il n'y a dans la nature aucun corps fixe. Un point qu'on appelle *fixe*, n'est au fond qu'un point invariablement attaché à quelque corps dont la masse est très-grande, et regardée comme infinie par rapport à celle du mobile que l'on considère. On peut donc toujours concevoir, à la place de ce point qu'on appelle *fixe*, un point vraiment *libre*, mais qui serait chargé d'une masse infinie; ou, pour s'en faire une image plus nette, un point dans lequel on supposerait qu'une quantité infinie de matière se trouve pour ainsi dire concentrée.

De cette manière, au lieu d'un corps de figure quelconque et de masse finie M, mobile autour d'un point I qu'on suppose *fixe*, on n'aura plus à considérer qu'un système *libre* composé de ce même corps M et d'un point matériel μ qui lui est attaché en I, et dont la masse μ est infinie par rapport à M.

3. Il est évident que dans un tel corps ou système le centre de gravité g tombe infiniment près du point I, et que ce centre, étant

22..

chargé de la masse infinie $\mu + M$, ne peut recevoir qu'un mouvement infiniment petit par l'action des forces finies qu'on y supposerait appliquées. Ce centre de gravité g reste donc immobile sous l'action de ces forces, et fait, à proprement parler, ce que nous nommons un point fixe.

4. Mais si la *force d'inertie* du système, c'est-à-dire la *masse* $M + \mu$, est infinie, le *moment d'inertie* ne l'est point. Ce moment, autour d'un axe mené par le centre g, a une valeur finie; et cette valeur, comme on va le voir, est exactement la même que si l'on prenait le moment d'inertie du simple corps proposé M autour du même axe. Si donc, en considérant toutes les forces appliquées au système comme transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité g, on trouve que ce centre reste immobile sous l'action de ces forces, à cause de la masse infinie $M + \mu$ dont il est chargé, on voit que le corps ne restera point immobile sous l'effort des *couples* qui naissent de cette translation, mais qu'il prendra une rotation finie θ autour du centre g, à cause de la valeur finie de son moment d'inertie relatif aux axes qui passent en ce point.

Il y a donc lieu de proposer des questions dynamiques relatives à un corps forcé de tourner sur un point fixe; et pour les résoudre, il suffit d'appliquer les solutions trouvées pour un corps libre, mais avec cette attention de regarder le point fixe comme étant le centre de gravité du corps, de supposer à ce corps une masse infinie, et de donner à son moment d'inertie la vraie valeur finie qu'il doit avoir, et que nous allons déterminer.

5. Supposons d'abord, pour plus de clarté, que ce point matériel, que nous attachons en I au corps proposé M, n'ait qu'une certaine masse finie μ; cherchons le moment d'inertie du système autour du centre de gravité g, et voyons ensuite ce que devient l'expression $(\mu + M) K^2$ de ce moment quand on fait μ infinie.

6. Soit G le centre de gravité du simple corps M; et faisons la ligne $IG = d$. Si l'on coupe cette ligne au point g en deux parties i et $d - i$ réciproques aux masses M et μ, on aura le centre de gravité g du système; et pour les distances de ce point à I et

à G,

$$i = d\,\frac{M}{\mu + M}, \quad d - i = d\,\frac{\mu}{\mu + M}.$$

Or le moment d'inertie du point massif μ autour du centre g est évidemment μi^2 : celui du corps M, relatif au même point, est composé, 1° de son moment d'inertie autour de son propre centre de gravité G, et que je désigne par MD^2 ; 2° du produit $M(d-i)^2$ de la masse de ce corps par le carré de la distance $(d-i)$ de son centre au point g. En ajoutant ces valeurs on aura donc, pour le moment d'inertie du système, représenté par $(\mu + M)K^2$,

$$(\mu + M)K^2 = \mu i^2 + M(d-i)^2 + MD^2,$$

d'où, en mettant pour i sa valeur précédente, on tire

$$(\mu + M)K^2 = M\left(D^2 + \frac{d^2}{1 + \frac{M}{\mu}}\right).$$

Actuellement, supposons que la masse μ augmente depuis zéro jusqu'à l'infini; on voit que le moment d'inertie augmente depuis MD^2, qui est sa valeur la plus petite, jusqu'à $M(D^2 + d^2)$, qui est sa valeur la plus grande : de sorte qu'en faisant $\mu = \infty$, afin de passer à l'hypothèse mathématique d'un point fixe dans le corps M, on a

$$(\mu + M)K^2 = M(D^2 + d^2);$$

ce qui est précisément la même valeur que si l'on eût pris le moment d'inertie du simple corps M autour du point I.

7. Le moment d'inertie du système ayant donc une valeur finie, il est clair que si ce moment est représenté à la manière ordinaire par le produit $(\mu + M)K^2$, la ligne K qui représente le *bras de l'inertie* doit être regardée comme *nulle*, à cause de la masse $(\mu + M)$ égale à l'infini. Cependant il est bon de remarquer que cette ligne infiniment petite K est infiniment grande par rapport à la distance i du point I au centre de gravité g du système. Il en est de cette ligne K à l'égard de la seconde i, comme du sinus d'un arc infiniment petit à l'égard de son

sinus verse. Si l'on compare, en effet, l'expression de K^2, qui est

$$K^2 = \frac{\mu M \left[d^2 + D^2 \left(1 + \frac{M}{\mu} \right) \right]}{(\mu + M)^2},$$

à celle de i^2, qui est

$$i^2 = d^2 \frac{M^2}{(\mu + M^2)},$$

on trouve

$$\frac{K^2}{i^2} = \frac{\mu}{M} \cdot \frac{d^2 + D^2 \left(1 + \frac{M}{\mu} \right)}{d^2},$$

d'ou résulte, en faisant $\mu = \infty$,

$$\frac{K^2}{i^2} = \infty;$$

et par conséquent K infiniment grand par rapport a i.

D'un autre côté il faut remarquer que la quantité $\frac{K}{i}$, qui en géométrie représente une ligne, ne répond point ici à une ligne infinie, mais à une certaine ligne terminée l. Car en multipliant les deux nombres de l'équation précédente par i, et mettant dans le second membre, au lieu de i, sa valeur $d \frac{M}{\mu + M}$, on trouve

$$\frac{K^2}{i} = \frac{d^2 + D^2 \left(1 + \frac{M}{\mu} \right)}{d \left(1 + \frac{M}{\mu} \right)}:$$

d'ou, en faisant $\mu = \infty$, on tire

$$\frac{K^2}{i} = \frac{d^2 + D^2}{d} = d + \frac{D^2}{d} = l,$$

ce qui est l'expression de la ligne IC qui va du point I au *centre* C *d'oscillation* du corps M autour de ce point I.

8. On voit par là que le même point C qui est réciproque au point I dans le simple corps M, est aussi réciproque à I dans le systeme com-

posé du même corps M et du point matériel de masse infinie μ placé en I. Si donc on suppose que le système est frappé en I à la distance infiniment petite i du centre g, soit à gauche, soit à droite de ce point g, le centre spontané de rotation se trouvera de l'autre côté, en C, à une distance finie $l = d + \frac{D^2}{d}$. Or maintenant, quelque petite que soit cette distance i du point I au centre g, on peut toujours concevoir entre ces deux points un autre point O dont la distance x au point g soit infiniment petite par rapport à i, et par conséquent telle, que l'expression $\frac{K^2}{x}$ soit infiniment grande par rapport à $\frac{K^2}{i}$; donc, puisque celle-ci répond à une ligne terminée l, l'autre $\frac{K^2}{x}$ répondra à une ligne infinie : de sorte que le centre spontané C' correspondant au centre de percussion O sera à une distance infinie du centre de gravité g. Lors donc que dans nos formules nous trouverons l'expression $\frac{K^2}{x}$, où nous aurons à faire la variable *indépendante* x égale à *zéro*, il faudra prendre $\frac{K^2}{x} = \infty$, bien que l'expression semblable $\frac{K^2}{i}$ réponde à une ligne *finie* l lorsque la variable i, *dépendante* de K, devient aussi égale à zéro.

9. Ainsi il faut bien se garder de confondre en dynamique cette ligne infiniment petite K, qui représente le bras d'inertie du système, avec la ligne infiniment petite i, qui marque la distance du centre de gravité g au point massif μ attaché en I, quoique ces deux lignes deviennent également *nulles* dans notre hypothèse de $\mu = \infty$. Il faut aussi bien distinguer les vraies valeurs des expressions $\frac{K^2}{i}$ et $\frac{K^2}{x}$, dont la première, où i et K sont toutes deux variables avec μ, donne une ligne *finie* $l = d + \frac{D^2}{d}$, tandis que l'autre $\frac{K^2}{x}$, où x est indépendante de μ, donne une ligne *infinie* dans le cas de $x = 0$. Ces distinctions délicates sont aussi nécessaires en dynamique qu'en analyse; car pour peu qu'on les néglige, on s'expose à tomber dans des erreurs grossières.

10. Pour en donner un exemple, supposons que notre système

ayant reçu l'impulsion d'un couple donné N, on demande avec quelle force Q le corps frapperait un point fixe T qu'on viendrait à lui présenter à une distance quelconque x du centre de gravité g. Nous avons démontré ailleurs qu'on aura pour la grandeur Q de cette percussion

$$Q = N \frac{x}{K^2 + x^2},$$

et que le maximum de Q se trouve au point T qui répond à la distance $x = K$, c'est-à-dire à l'extrémité du bras K de l'inertie du système. Or, comme cette ligne K est ici *nulle*, on pourrait conclure que le centre T de la percussion maximum se confond avec le centre de gravité g : ce qui serait en dynamique une erreur très-grande; car il est aisé de voir qu'au point g la percussion est entièrement nulle, tandis qu'au point T, quoique infiniment proche de g, la percussion est infinie.

Et en effet l'expression

$$Q = N \frac{x}{x^2 + K^2} = N \frac{1}{x + \frac{K^2}{x}}$$

devient pour $x = 0$

$$Q = N \frac{1}{0 + \infty} = 0,$$

comme il est évident d'ailleurs que cela doit être, puisque le système tourne réellement sur son centre g et ne peut ainsi causer aucune percussion par ce point.

Mais en faisant $x = K$, l'expression devient

$$Q = N \frac{1}{2K};$$

laquelle, en prenant pour K sa valeur qui est ici *nulle*, devient

$$Q = N \frac{1}{0} = \infty.$$

11. De même, si le corps, au lieu d'être animé par un couple N, avait reçu l'impulsion d'une simple force P passant à une distance don-

née δ du centre g, auquel cas la percussion Q dont le corps serait capable à une distance quelconque x de ce même centre aurait pour expression

$$Q = P\frac{K^2 + \delta x}{K^2 + x^2},$$

on pourrait conclure que le centre T de la percussion maximum, qui se trouve à la distance

$$x = -\frac{K^2}{\delta} \pm \sqrt{K^2 + \frac{K^4}{\delta^2}},$$

se confond ici, à cause de $K = 0$, avec le centre de gravité g : ce qui serait une erreur de doctrine toute semblable à la précédente.

Car au point g, c'est-à-dire quand on a $x = 0$, la percussion Q est actuellement égale à la force P, tandis qu'au point T, qui répond à la valeur précédente de x, on a une percussion Q *infinie*.

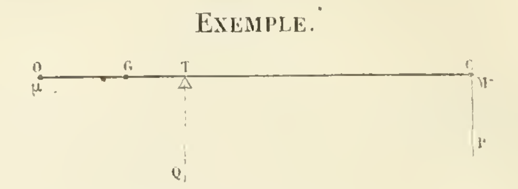
12. Au reste, pour se faire des idées plus nettes et pour éviter toute erreur dans les applications, il vaudra toujours mieux supposer que la masse μ n'est point infinie, mais seulement très-grande, et conserver ainsi cette lettre μ dans toutes les expressions de notre analyse. Toutes les quantités seront alors bien distinctes, et l'on pourra voir leurs vraies valeurs mathématiques dans l'hypothèse de $\mu = \infty$. Cette manière de voir, en supposant μ non pas infinie, mais seulement très-grande, est d'ailleurs plus conforme à la nature, car en réalité il n'existe pas de corps ni de point dont la masse soit infinie; cette supposition n'est pas moins imaginaire que celle d'un point fixe. Tout ce qu'on voit de réel, c'est qu'un corps, tel qu'un levier par exemple, peut très-bien s'appuyer par un de ses points contre un autre corps dont la masse est très-grande et dont le mouvement, en vertu des forces appliquées, sera très-petit et comme insensible par rapport à celui que prendra le mobile que l'on considère.

Mais il ne sera peut-être pas inutile d'éclaircir encore ces points de doctrine par quelques applications numériques.

13. Soit CO une verge immatérielle chargée à ses bouts C et O de deux points massifs M et μ. Si la verge est frappée en C avec une force

P, on demande la percussion Q que cette verge roide peut causer sur un point T pris à la distance $GT = x$ du centre de gravité G du système des deux masses μ et M.

EXEMPLE.



Le moment d'inertie du système autour de son centre G sera, en faisant $GO = i$, $GC = l - i$ (l étant la longueur CO),

$$(M + \mu) K^2 = \mu i^2 + M (l - i)^2,$$

K désignant le bras de l'inertie ; or on a

$$i = l . \frac{M}{M + \mu}, \quad l - i = l \frac{\mu}{M + \mu};$$

donc

$$(M + \mu) K^2 = l^2 . \frac{\mu M^2 + M\mu^2}{(M + \mu)^2} = l^2 \frac{\mu M}{M + \mu};$$

d'où l'on tire

$$K^2 = l^2 . \frac{\mu M}{(M + \mu)^2} = i . (l - i).$$

La percussion Q causée en T, à la distance x de G, est exprimée par

$$Q = P . \frac{K^2 + x (l - i)}{K^2 + x^2};$$

si l'on cherche la valeur de x qui répond au maximum de la percussion Q, et qu'on la désigne par x_0, on trouvera

$$x_0 = - i \pm \sqrt{il},$$

et mettant cette valeur de x dans l'expression de Q, on aura, pour la valeur maximum de cette percussion,

$$Q_0 = \frac{P}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{l - i}{i}} \right),$$

ou, si l'on veut,

$$Q_0 = \frac{P}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{\mu}{M}}\right).$$

Exemple. Prenons le cas de $M = 1$, $\mu = 9999$, ce qui donne $\frac{\mu}{M} = 9999$; on aura

$$K^2 = l^2 . \frac{9999}{10000^2} = i(l - i),$$

$$i = l . \frac{1}{10000},$$

d'où

$$\frac{K}{i} = l . \frac{9999}{10000}.$$

L'abscisse x_0 du point T où se fait la plus grande percussion sera

$$x_0 = l\left(-\frac{1}{10000} \pm \frac{1}{100}\right),$$

et cette percussion maximum sera

$$Q_0 = \frac{P}{2}(1 + \sqrt{10000}) = \frac{P}{2} \cdot 101,$$

de même sens que la force P; ou, au point T' réciproque à T,

$$Q_0 = \frac{P}{2}(1 - \sqrt{10000}) = -\frac{P}{2} \cdot 99,$$

de sens contraire à P.

Dans cet exemple donc où la verge OC est chargée à ses deux bouts de deux points massifs μ et M qui sont entre eux dans le rapport de 9999 à 1, et où le point M est frappé par une force P, la percussion maximum Q vaut $50\frac{1}{2}$ fois la force d'impulsion P, et au point T', réciproque à T, elle est $49\frac{1}{2}$ fois cette même force P, mais de *sens contraire* à la première.

Le point T de la plus grande percussion est entre le centre G et le centre C; l'autre point T' de la percussion maximum de sens contraire

à P, tombe de l'autre côté du centre G. Ces deux points T et T' sont tous deux très-voisins du centre de gravité G : le premier T en est à une distance GT égale à $\frac{99}{10000}$ de OC ; l'autre T' à une distance GT' égale à $\frac{101}{10000}$ de la même ligne OC : leur distance mutuelle TT' est donc $\frac{200}{10000}\, l = \frac{1}{50}\, l$.

Le bras K de l'inertie du corps autour de G est $= l \cdot \frac{\sqrt{9999}}{10000} = \frac{1}{100}\, l$ à peu près ; et $TT' = x_0 + x'_0$ est exactement le double de K', K' étant le bras de l'inertie autour de O ; car on a

$$K'^2 = K^2 + i^2 = il - i^2 + i^2 = il - l^2 \cdot \frac{1}{10000},$$

$$K' = l \cdot \frac{1}{100} \quad \text{et} \quad 2K' = l \cdot \frac{1}{50};$$

donc

$$TT' = 2K'.$$

14. Si dans les formules de l'article **13** on veut faire μ infinie par rapport à M, afin de passer à l'hypothèse mathématique d'un point fixe O, pris dans la verge roide OC chargée en C du point massif M, on trouvera pour le moment d'inertie $(M + \mu)\, K'^2$ autour du point fixe O,

$$(M + \mu)\, K'^2 = M l^2,$$

le même que donnerait le simple corps M autour du point O. Mais le bras K' deviendra

$$K' = \sqrt{\frac{M l^2}{M + \mu}} = 0;$$

cependant $\frac{K'^2}{i}$ deviendra une ligne finie égale à l ; d'où l'on voit que K' qui est infiniment petit, est infiniment grand par rapport à i ; ainsi le bras d'inertie K' est à l'égard de i, distance de μ au centre de gravité G du système, ce qu'un sinus d'arc infiniment petit est à l'égard du sinus verse.

Si, μ restant un point massif, G est le centre de gravité d'un corps

de figure quelconque de masse M, on a pour le moment d'inertie du système de μ et de M, autour du centre de gravité G,

$$(M + \mu) K^2 = M \left(D^2 + l^2 \frac{1}{1 + \frac{M}{\mu}} \right),$$

D étant le bras de l'inertie du simple corps M autour de son centre de gravité; d'où, en faisant μ infinie pour passer à l'hypothèse d'un point fixe en μ, on tire le moment d'inertie

$$(M + \mu) K^2 = M (D^2 + l^2),$$

le même que si le point μ était anéanti.

Quoi qu'il en soit, il résulte de tout ce qu'on vient de dire que dans le mouvement d'un corps M autour d'un point fixe O, le centre de percussion ordinaire n'est, pas plus que dans un corps libre, le centre de la plus grande percussion de ce corps contre un point fixe T qu'on viendrait opposer tout à coup à son mouvement actuel. Ce véritable centre T est infiniment près du point fixe Q, et cette percussion est infinie.

15. Nous avons trouvé dans un précédent travail que le point par lequel un corps M pourrait communiquer à un point libre de masse m en repos la plus grande vitesse possible, n'est pas le centre de percussion *maximum* du même corps contre un point qu'on supposerait fixe; que ce nouveau centre de plus grande vitesse communiquée à un point libre m, se trouve à une distance λ du centre spontané O du corps choquant M, qui est exprimée par

$$\lambda = \pm \sqrt{a^2 + K^2 \left(1 + \frac{M}{m}\right)},$$

K étant le bras de l'inertie du corps M autour de son centre de gravité G, et a la distance de ce même centre G au centre spontané de la rotation. Si, au lieu du simple corps M, nous considérons le système $M + \mu$ composé de M et d'un point massif μ placé en I à la distance a' du centre G de ce système $M + \mu$, il faudra changer dans l'expression précédente de μ, M en $M + \mu$, a en a' et K en K'^2, K' étant le

bras de l'inertie du système autour du centre G; ainsi on aura

$$\lambda^2 = a'^2 + K'^2 \left(1 + \frac{M + \mu}{m}\right)$$

ou

$$\lambda^2 = a'^2 + K'^2 + \frac{(M + \mu)}{m} K'^2.$$

Maintenant si l'on suppose $\mu = \infty$, afin de passer à l'hypothèse d'un point fixe I autour duquel tourne le simple corps M, on aura $a' = 0$, $K' = 0$; mais $(M + \mu) K'^2$ ne deviendra pas zéro, et sa vraie valeur sera

$$(M + \mu) K'^2 = M (K^2 + d^2),$$

d étant la distance du centre G au point I, et K le bras de l'inertie du simple corps M autour de son centre G; $M (K^2 + d^2)$ sera donc le moment d'inertie du corps autour du point fixe I.

Ainsi quand un corps M tourne autour d'un point fixe I, le centre V de plus grande vitesse communiquée à un point libre m se trouve à une distance

$$IV = \sqrt{\frac{M (K^2 + d^2)}{m}};$$

ce point V dépend, comme on voit, du rapport qu'il y a entre la masse M du corps choquant et la masse m du corps choqué; la distance IV est proportionnelle à la racine carrée du rapport $\frac{M}{m}$.

Si $m = M$, IV devient simplement $\sqrt{K^2 + d^2}$; c'est le bras de l'inertie du corps autour du point fixe.

Si m devenait infinie et représentait ainsi un point fixe, IV deviendrait nulle, et ce serait alors le centre de percussion *maximum*, ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on a déjà établi.

Si m était très-petite par rapport à M, la distance IV serait très-grande.

DES

CENTRES DE COURBURE SUCCESSIFS;

Par J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE,

Ingénieur des Mines, Répétiteur à l'École Polytechnique,
Docteur ès Sciences mathématiques.

1. De même que l'on déduit d'une courbe proposée une autre ligne qu'on appelle sa développée, de même on peut former la développée de la développée, et ainsi de suite indéfiniment. On obtient de cette manière pour un point donné, un premier, un second, un troisième... centres de courbure. De là deux questions distinctes : ou bien chercher pour tous les points de la courbe le lieu des centres de courbure d'un ordre déterminé quelconque k, c'est-à-dire sa $k^{ième}$ développée ; ou bien pour un point assigné arbitrairement sur cette courbe envisager toute la série de ses centres de courbure des divers ordres. Cette dernière question est celle que nous nous proposerons ici. La première a été résolue depuis longtemps par une méthode tres-simple que je dois rappeler brièvement afin de bien fixer l'interprétation des signes.

2. Nous supposerons la courbe représentée par une équation entre le rayon de courbure ρ et l'angle de contingence ω. Un arc élémentaire de la première développée a pour valeur $d\rho$ d'après la propriété fondamentale de ces courbes. D'autre part, l'angle de ses normales extrêmes est le même que celui $d\omega$ de la proposée, car ces droites sont respectivement parallèles aux tangentes de cette dernière. Si donc ρ_1 est la longueur de ces normales, on aura l'égalité

$$d\rho = \rho_1 d\omega, \quad \rho_1 = \frac{d\rho}{d\omega},$$

qui donne la valeur du rayon de courbure de la développée, c'est-à-dire l'équation de cette courbe entre les mêmes variables.

Pour l'interprétation du signe de cette expression, il suffira au lec-

teur de tracer deux arcs de courbe. Si l'on suppose d'abord la courbure croissante dans le sens où augmente ω, ρ_1 se trouve porté parallèlement à l'arc élémentaire et dans le sens même de cet arc; mais alors ρ diminue et sa dérivée ρ_1 est négative. Si au contraire la courbure diminue, ρ_1 est dirigé dans le sens opposé à celui de l'arc; mais dans ce cas, ρ augmente et sa dérivée ρ_1 est positive. De là la règle suivante : Le rayon de la développée se porte dans le sens de l'arc ou en sens contraire suivant qu'il est négatif ou positif.

3. De l'équation précédente on conclut immédiatement celle d'une développée quelconque

$$\rho_k = \frac{d^k \rho}{d\omega^k}.$$

La règle précédente montre que si tous les rayons sont positifs entre ρ et ρ_k, leur série forme un polygone dont tous les angles sont droits, et qui tourne constamment dans le même sens, que je suppose direct pour fixer les idées. Si donc nous laissons le signe de chacune des dérivées implicitement compris dans son expression, nous devrons prendre pour le rayon qui joint les centres k et $k+1$ suivant la double parité de k le sens suivant :

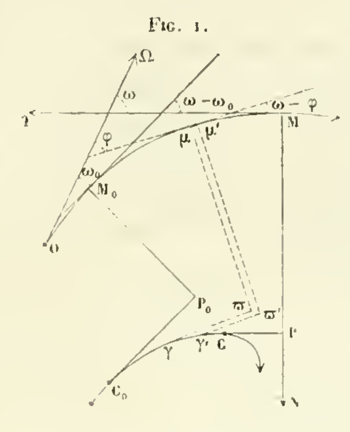
$4i$ parallèle à la normale et de même sens,
$4i+1$ parallèle à la tangente et de sens contraire,
$4i+2$ parallèle à la normale et de sens contraire,
$4i+3$ parallèle à la tangente et de même sens.

4. Actuellement je prends le point quelconque considéré M comme origine, et j'y trace deux axes rectangulaires, l'un MN suivant la normale, l'autre MT en sens contraire de la tangente. Je leur rapporterai le centre C d'ordre quelconque k par deux coordonnées T et N. Enfin je forme la figure correspondante $M_0 P_0 C_0$ pour un point fixe quelconque M_0 et j'imagine l'arc CC_0 de la $k^{ième}$ développée qui relie les deux centres.

Nous obtenons par là un hexagone mixtiligne $PMM_0 P_0 C_0 C$ dont la résultante $T = PC$ sera la somme des projections sur la tangente des quatre derniers côtés, car le premier lui est perpendiculaire. Si donc

on désigne par de petites lettres les projections des grandes lettres de

Fig. 1.



la figure, on aura, en mettant les signes en évidence,

$$T = mm_0 - m_0 p_0 + p_0 c_0 - cc_0.$$

Reste à calculer les valeurs absolues de ces projections.

On a d'abord

$$p_0 c_0 = T_0 \cos(\omega - \omega_0), \quad m_0 p_0 = N_0 \sin(\omega - \omega_0)$$

Pour évaluer mm_0, envisageons l'élément $\mu\mu'$ qui correspond à l'angle φ variable de ω_0 à ω. Il a pour longueur $\rho d\varphi$ en substituant φ à ω dans l'expression générale de ρ tirée de l'équation de la courbe. Sa projection sera donc $\rho d\varphi \cos(\omega - \varphi)$ ou $\rho d\varphi \cos(\varphi - \omega)$. On a par suite

$$mm_0 = \int_{\omega_0}^{\omega} \rho \cos(\varphi - \omega)\, d\varphi.$$

L'arc CC_0 est composé d'éléments $\gamma\gamma'$ qui correspondent à $\mu\mu'$ et ont pour valeur $\rho_k d\varphi$. Comme ils leur sont respectivement parallèles, on aura pour la projection cc_0 l'expression semblable à la précédente

$$cc_0 = \int_{\omega_0}^{\omega} \rho_k \cos(\varphi - \omega)\, d\varphi.$$

Mais il faut placer ici une remarque essentielle.

5. La figure a été faite pour l'hypothèse $k = 4i$. Si k restant pair est de la forme $4i + 2$, l'arc $\gamma\gamma'$ est encore parallèle à $\mu\mu'$; mais CC_0 se trouve au point C_0 en prolongement de $P_0 C_0$ au lieu d'être en rebroussement; cc_0 doit donc être changé de signe. Si k devient impair, $\gamma\gamma'$ est perpendiculaire à $\mu\mu'$, et le cosinus doit être remplacé par un sinus. Pour $4i + 1$, $C_0 C$ se trouve entre la courbe et PC, et il faut prendre le sinus négativement; pour $4i + 3$, il est de l'autre côté de PC, et le sinus est positif.

En résumé, le cosinus de l'expression de cc_0 doit être remplacé par les valeurs

$$\cos(\varphi - \omega), \quad -\sin(\varphi - \omega), \quad -\cos(\varphi - \omega), \quad \sin(\varphi - \omega),$$

suivant que k est de la forme

$$4i, \quad 4i + 1, \quad 4i + 2, \quad 4i + 3.$$

Or ces quatre changements peuvent être compris dans la formule unique

$$\cos\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right),$$

de sorte que l'expression générale de cc_0 sera

$$cc_0 = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d^k \rho}{d\varphi^k} \cos\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) d\varphi.$$

Il vient ainsi en définitive pour l'expression de T

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} T = {} & T_0 \cos(\omega - \omega_0) - N_0 \sin(\omega - \omega_0) \\ & - \int_{\omega_0}^{\omega} d\varphi \left\{ \frac{d^k \rho}{d\varphi^k} \cos\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) - \rho \cos(\varphi - \omega) \right\}. \end{aligned}$$

6. Pour obtenir en second lieu la valeur de N, il suffira de projeter l'hexagone mixtiligne sur la normale. En conservant les mêmes minuscules pour désigner les nouvelles projections et mettant les signes en évidence, nous aurons cette fois-ci

$$N_0 = mm_0 + m_0 p_0 + p_0 c_0 - cc_0.$$

Les valeurs absolues de ces projections sont maintenant

$$p_0 c_0 = \mathrm{T}_0 \sin(\omega - \omega_0), \quad m_0 p_0 = \mathrm{N}_0 \cos(\omega - \omega_0).$$

Pour mm_0 il faut remplacer $\cos(\omega - \varphi)$ par $\sin(\omega - \varphi)$ ou $-\sin(\varphi - \omega)$, ce qui donne

$$mm_0 = -\int_{\omega_0}^{\omega} \rho \sin(\varphi - \omega)\, d\varphi,$$

et de même

$$cc_0 = -\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d^k \rho}{d\varphi^k} \sin\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) d\varphi.$$

On aura par suite, pour la seconde coordonnée N,

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathrm{N} &= \mathrm{T}_0 \sin(\omega - \omega_0) + \mathrm{N}_0 \cos(\omega - \omega_0) \\ &+ \int_{\omega_0}^{\omega} d\varphi \left\{ \frac{d^k \rho}{d\varphi^k} \sin\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) - \rho \sin(\varphi - \omega) \right\}. \end{aligned}$$

7. Ces formules générales déterminent la position d'un centre quelconque d'après la valeur de k, qui s'y trouve en évidence (*). Si l'on veut se représenter d'une manière simple la disposition d'ensemble de leur série tout entière, le plus commode sera d'y faire passer une courbe. Il sera facile d'y retrouver après coup la position des divers centres, car il suffira pour cela d'inscrire un polygone dont tous les angles soient droits. La question est bien entendu indéterminée, puisque par cette série discontinue de points on peut mener une infinité de courbes; mais on trouvera très-simplement une solution en éliminant k entre les équations (1) et (2).

L'équation résultante renfermera alors T et N à titre de coordonnées courantes, et ω comme un paramètre qui caractérise le point de la courbe qui a été considéré, et fournit par sa variation toute une fa-

(*) Pour qu'on ne rencontre pas de difficultés dans leur application, il faut que la différentielle ne devienne pas infinie dans les limites de l'intégrale, ou que la courbe et sa $k^{\text{ième}}$ développée ne présentent pas de rebroussements entre M et M_0; condition facile à remplir, puisque M_0 est un point choisi arbitrairement.

mille de lieux des centres : ω_0, N_0, T_0 sont des constantes absolues, qui se rapporteront en général à un point singulier où l'évaluation de N_0 et T_0 soit facile. Quant à k et φ, ils n'entrent plus, car k a été éliminé, et φ est un symbole d'intégration qui disparaît quand on prend l'intégrale entre ses limites.

8. *Application.* — Pour montrer une application de cette méthode, je considérerai la spirale logarithmique. Il est facile d'abord d'en trouver l'équation. Lorsque l'azimuth croît en progression arithmétique, le rayon vecteur croît en progression géométrique. Mais l'angle μ de la normale et du rayon vecteur étant constant, l'azimuth et l'angle de contingence varient ensemble des mêmes quantités. On sait, de plus, que le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur. On a, d'après cela,

$$\rho = e^{m\omega}, \quad \rho_k = \frac{d^k\rho}{d\omega^k} = m^k e^{m\omega},$$

m désignant la tangente de l'angle μ, et l'origine étant placée au point où le rayon de courbure est l'unité.

Quant au point arbitraire M_0, nous le prendrons au pôle en faisant $\omega_0 = -\infty$. On y a alors, quel que soit k, $\rho_k = 0$, et par suite, $N_0 = 0$, $T_0 = 0$. Les formules générales se réduisent par là au terme qui contient l'intégrale définie

$$T = -\int_{-\infty}^{\omega} e^{m\varphi}\left\{ m^k \cos\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) - \cos(\varphi - \omega)\right\} d\varphi,$$

$$N = +\int_{-\infty}^{\omega} e^{m\varphi}\left\{ m^k \sin\left(\varphi - \omega + \frac{k\pi}{2}\right) - \sin(\varphi - \omega)\right\} d\varphi.$$

9. Ces intégrales sont dans tous les traités, et je les prends de suite entre leurs limites. On voit que pour la limite inférieure toutes s'évanouissent comme contenant en facteur $e^{-\infty}$ avec des coefficients trigonométriques à la vérité indéterminés, mais nécessairement inférieurs à l'unité. Pour la limite supérieure $\varphi = \omega$, ω disparaît en même temps que φ des lignes trigonométriques, et ne subsiste plus que dans l'exponentielle. Il reste seulement $\frac{k\pi}{2}$ pour le premier arc et zéro pour

le second. On a ainsi

$$T = -\frac{e^{m\omega}}{m^2+1}\left\{ m^k \left(m\cos\frac{k\pi}{2} + \sin\frac{k\pi}{2}\right) - m \right\},$$

$$N = +\frac{e^{m\omega}}{m^2+1}\left\{ m^k \left(m\sin\frac{k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\right) + 1 \right\};$$

ce que j'écris de la manière suivante :

$$\frac{m}{m^2+1} e^{m\omega} - T = \frac{e^{m\omega}}{m^2+1}\cdot m^k \left(m\cos\frac{k\pi}{2} + \sin\frac{k\pi}{2}\right),$$

$$N - \frac{1}{m^2+1} e^{m\omega} = \frac{e^{m\omega}}{m^2+1}\cdot m^k \left(m\sin\frac{k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\right).$$

Interprétons géométriquement ces résultats : soit M_k le centre quel-

FIG. 2.

conque rapporté au point M par ses coordonnées

$$T = \overline{PM_k}, \quad N = \overline{MP}.$$

Le premier centre de courbure M_1 s'obtient en élevant OM_1 perpendiculaire sur MO, et l'on a

$$\overline{MM_1} = \rho = e^{m\omega};$$

d'où

$$\frac{e^{m\omega}}{\sqrt{m^2+1}} = \overline{MM_1}\cos\mu = \overline{MO},$$

et, par suite, d'une part,

$$\frac{1}{m^2+1}e^{m\omega} = \overline{\text{MO}}\cos\mu = \overline{\text{MQ}}.$$

$$\text{N} - \frac{1}{m^2+1}e^{m\omega} = \overline{\text{MP}} - \overline{\text{MQ}} = \overline{\text{PQ}} = \overline{\text{OR}};$$

et, d'autre part,

$$\frac{m}{m^2+1}e^{m\omega} = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\cdot\frac{e^{m\omega}}{\sqrt{m^2+1}} = \overline{\text{MO}}\ .\sin\mu = \overline{\text{OQ}} = \overline{\text{PR}}$$

$$\frac{m}{m^2+1}e^{m\omega} - \text{T} = \overline{\text{PR}} - \overline{\text{PM}}_k = \overline{\text{RM}}_k.$$

Nos formules deviennent par là

$$\text{RM}_k = \frac{\overline{\text{MO}}}{\sqrt{m^2+1}}\cdot m^k\left(m\cos\frac{k\pi}{2} + \sin\frac{k\pi}{2}\right),$$

$$\overline{\text{OR}} = \frac{\overline{\text{MO}}}{\sqrt{m^2+1}}\cdot m^k\left(m\sin\frac{k\pi}{2} - \cos\frac{k\pi}{2}\right),$$

et l'élimination de k va s'effectuer facilement.

10. On tire d'abord de là, en divisant membre à membre,

$$-\frac{\overline{\text{RM}}_k}{\overline{\text{OR}}} = \frac{m\cos\frac{k\pi}{2} + \sin\frac{k\pi}{2}}{\cos\frac{k\pi}{2} - m\sin\frac{k\pi}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\mu + \operatorname{tang}\frac{k\pi}{2}}{1 - \operatorname{tang}\mu\operatorname{tang}\frac{k\pi}{2}} = \operatorname{tang}\left(\mu + \frac{k\pi}{2}\right),$$

et, par suite,

$$k = \frac{2}{\pi}\left\{\operatorname{arc tang}\left(-\frac{\overline{\text{RM}}_k}{\overline{\text{OR}}}\right) - \mu\right\} = \frac{2}{\pi}\left(\widehat{\text{ROA}} - \widehat{\text{ROB}}\right) = \frac{2}{\pi}\widehat{\text{MOM}}_k,$$

ou en représentant par θ l'azimut $\widehat{\text{MOM}}_k$,

$$k = \frac{2}{\pi}\theta.$$

On a d'autre part, en ajoutant les carrés,

$$\overline{\mathrm{RM}}_k^2 + \overline{\mathrm{OR}}^2 = \overline{\mathrm{MO}}^2 . m^{2k}.$$

Mais on a aussi

$$\overline{\mathrm{RM}}_k^2 + \overline{\mathrm{OR}}^2 = \overline{\mathrm{OM}}_k^2 ;$$

si donc on appelle r le rayon vecteur $\overline{\mathrm{OM}}_k$ et R la constante $\overline{\mathrm{MO}}$, on aura

$$r^2 = \mathrm{R}^2 . m^{2k};$$

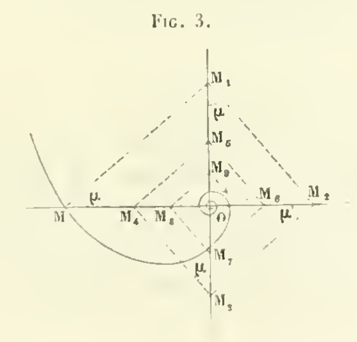
d'où en extrayant la racine et substituant à k la valeur précédente,

$$r = \mathrm{R} . m^{\frac{2}{\pi}\theta}.$$

On voit par là que toute la série des centres de courbure du point M est distribuée le long d'une autre spirale logarithmique que j'appellerai la *spirale-lieu*, pour la distinguer de la proposée.

11. La simplicité de ce résultat mérite qu'on l'établisse directement en se fondant sur les propriétés de la spirale. Le centre de courbure M_1 du point quelconque M s'obtient en élevant sur le rayon vecteur OM la perpendiculaire OM_1 jusqu'à la normale MM_1. Comme du reste

Fig. 3.



la développée est encore une spirale, son centre M_2 s'obtiendra de même en élevant sur son rayon vecteur OM_1 la perpendiculaire OM_2 jusqu'à sa normale $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$. Mais OM_2 se trouve en prolongement de OM. De même OM_3 continuera OM_1, et ainsi de suite.

De là ce premier résultat, encore plus simple que le précédent : tous les centres de courbure d'un point d'une spirale logarithmique sont disposés sur les deux branches d'une croix rectangulaire qui a son centre au pôle et une de ses droites suivant le rayon vecteur. On obtiendra donc, de la manière la plus claire, tous les centres par l'intersection de cette croix et de la spirale-lieu, qu'il nous faut encore retrouver par cette voie.

12. Rapportons pour cela le lieu à des coordonnées polaires (r, θ) dont O soit le pôle et OM l'axe polaire. On aura, d'une part,

$$\theta = \frac{k\pi}{2},$$

et, d'autre part, dans un triangle rectangle quelconque $OM_k M_{k-1}$ formé par un rayon de courbure et les deux branches de la croix rectangulaire,

$$r_k = r_{k-1} \operatorname{tang} \mu = m r_{k-1}.$$

On tire de là, de proche en proche,

$$r_k = m^k . \mathrm{R}.$$

car r_0 n'est autre que R. Si maintenant on élimine k entre ces deux relations, on retrouve l'équation précédente

$$r = \mathrm{R} . m^{\frac{2}{\pi}\theta}.$$

13. D'après la forme de cette équation, on voit que la spirale proposée et la spirale-lieu ont même pôle, et qu'elles auront ou non même sens, suivant que μ sera supérieur ou inférieur à 45 degrés, ou que la proposée s'ouvre rapidement ou lentement. Pour la spirale de 45 degrés, le lieu se réduit à un cercle, et les centres sont seulement au nombre de quatre disposés en carré et se reproduisant périodiquement.

L'angle μ' de la spirale-lieu sera donné par sa tangente

$$m' = \frac{\pi}{2 \log \operatorname{hyp}. m};$$

cette valeur est indépendante de ω; ce qui établit ce résultat remarquable, que toutes les spirales-lieu sont identiques pour les divers points d'une spirale proposée. On les obtiendrait donc toutes successivement par la rotation de l'une d'elles autour du pôle. On voit même que, dans une quelconque de ses positions, la spirale mobile forme la spirale-lieu de la proposée pour tous les points où elle la rencontre; de telle sorte qu'il suffit d'un seul tour pour avoir égard à toutes les spires de la proposée.

14. Si l'on veut connaître la spirale logarithmique qui sera identique à sa spirale-lieu, il suffit de faire dans la dernière équation $m' = m$; elle donne alors

$$m \log m = \frac{\pi}{2}.$$

Cette équation a été déjà étudiée, comme conduisant à trouver une spirale qui soit sa propre développée. Il est naturel, d'après cela, qu'elle fournisse la solution que nous cherchions. Comme le sens des deux spirales est le même, puisqu'elles coïncident, on prévoit que l'angle μ doit se trouver dans la seconde moitié du quadrant; il est, en effet, d'environ 75 degrés.

SUR LES INTÉGRALES TRINOMES;

PAR M. BESGE.

Soient μ et ν des constantes positives, ou du moins dont la partie réelle soit positive; a un paramètre tel, que $1 + ax$ ne s'évanouisse pour aucune valeur de x comprise entre 0 et 1; enfin n un nombre entier positif.

Il n'est pas difficile de voir que l'intégrale trinôme

$$B = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1}(1-x)^{n+\nu-1}\,dx}{(1+ax)^{n+1}}$$

doit se déduire par des différentiations relatives à a de l'intégrale plus simple

$$A = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx}{1+ax},$$

qui répond au cas de $n = 0$. Je trouve, en effet, pour cet objet la formule de réduction que voici :

$$B = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^n.(1+a)^n A}{da^n},$$

ou bien, en développant le calcul,

$$B = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left[(1+a)^n \frac{d^n A}{da^n} + \frac{n^2}{1}(1+a)^{n-1}\frac{d^{n-1}A}{da^{n-1}} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2}(1+a)^{n-2}\frac{d^{n-2}A}{da^{n-2}} + \ldots\right];$$

nous laisserons au lecteur à chercher la démonstration, qui du reste est assez simple.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

Par M. J. LIOUVILLE.

DIXIÈME ARTICLE.

Je conserve les deux modes de partition mis en usage dans notre neuvième article et qui ont cela de commun, que l'on y considère le nombre m dont on s'occupe comme composé de deux parties dont l'une est un carré et dont l'autre est un entier positif, lequel peut être quelconque dans le premier mode de partition, tandis que dans le second mode il est essentiellement pair : dans les deux cas, on introduit les diviseurs de ce nombre entier.

Ainsi, on pose d'une part

$$m = m'^2 + m'' = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

m'', d'', δ'' étant des entiers positifs, les deux derniers impairs, l'exposant α'' pouvant se réduire à zéro, et les valeurs de m' étant indifféremment positives ou négatives ou même zéro. Puis d'autre part on fait

$$m = m_1^2 + 2m_2 = m_1^2 + 2 d_2 \delta_2,$$

m_2 ou $d_2 \delta_2$ étant un entier essentiellement positif, d'ailleurs pair ou impair, δ_2 étant toujours impair, et d_2 pair ou impair comme m_2 : quant à l'entier m_1 qu'on peut prendre à volonté positif, négatif ou nul, il est naturellement du même genre que m, impair quand m est impair, pair quand m est pair.

Nous allons considérer deux sommes respectivement relatives à nos deux modes de partition. Ces sommes contiennent une fonction $f(x, y)$ de deux variables, qui doit être telle, que l'on ait

$$f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y),$$

pour toutes les valeurs de x, y dont on fera usage : on verra que y est toujours un nombre entier impair, et que x aussi est un entier, du même genre que m.

La première somme peut s'écrire ainsi :

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''f(2^{\alpha''}d''+m',\ \delta''-2m').$$

Elle se rapporte à l'équation

$$m=m'^2+m''=m'^2+2^{\alpha''}d''\delta''.$$

La second concerne au contraire le mode de partition marqué par

$$m=m_1^2+2m_2=m_1^2+2d_2\delta_2.$$

La voici :

$$\sum\sum(2d_2-\delta_2)f(m_1,\ 2d_2+\delta_2).$$

Le théorème que nous voulons donner au sujet de ces deux sommes consiste en ce que leurs valeurs sont généralement égales entre elles : il n'y a exception que quand m est un carré, et alors l'excès de la première sur la seconde s'exprime par

$$f(\sqrt{m},2\sqrt{m}-1)+3f(\sqrt{m},2\sqrt{m}-3)+5f(\sqrt{m},2\sqrt{m}-5)+\ldots+(2\sqrt{m}-1)f(\sqrt{m},1);$$

le terme général de cette dernière suite est

$$(2s-1)f(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-2s+1),$$

s entier et variant de 1 à $\sqrt{m}$.

Nous disons donc que

$$(\eta)\left\{\begin{aligned}&\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''f(2^{\alpha''}d''+m',\ \delta''-2m')-\sum\sum(2d_2-\delta_2)f(m_1,\ 2d_2+\delta_2)=0,\\&\text{ou }=f(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-1)+3f(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-3)+\ldots+(2\sqrt{m}-1)f(\sqrt{m},\ 1),\end{aligned}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré.

Cette formule contient comme cas particulier la formule (ζ) de l'article précédent. Il n'y a qu'à supposer que $f(x,y)$ ne contient pas y

et se réduit à une fonction $f(x)$ remplissant la condition

$$f(-x) = f(x).$$

La première de nos deux sommes deviendra

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''f(2^{\alpha''}d'' + m'),$$

comme dans la formule citée (ζ) : les seconds membres seront aussi les mêmes; il reste seulement à prouver que

$$\sum\sum(2d_2 - \delta_2)f(m_1) = \sum\zeta_1(m_2)f(m_1).$$

ou, ce qui revient au même, il faut prouver que

$$\sum(2d_2 - \delta_2) = \zeta_1(m_2),$$

$\zeta_1(m_2)$ désignant la somme des diviseurs de m_2. Cela est d'abord évident pour m_2 impair et se vérifie aisément dans le cas général de

$$m_2 = 2^{\mu}n,$$

en observant qu'alors δ_2 est un diviseur quelconque du nombre impair n et d_2 le produit d'un tel diviseur par 2^{μ}, d'où

$$\sum(2d_2 - \delta_2) = 2^{\mu+1}\zeta_1(n) - \zeta_1(n) = (2^{\mu+1} - 1)\zeta_1(n) = \zeta_1(m_2).$$

Ainsi la formule (η) contient la formule (ζ); mais plus tard on verra qu'elle peut être elle-même singulièrement généralisée.

Notons en passant un second cas particulier digne de remarque que cette formule renferme. On l'obtient en réduisant la fonction $f(x, y)$ à une simple fonction $f(y)$ de la seconde variable y, en supposant, bien entendu,

$$f(-y) = f(y).$$

On a alors l'expression de la différence entre

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta'' f(\delta''-2m')$$

et

$$\sum\sum(2d_2-\delta_2)f(2d_2+\delta_2).$$

Cette différence, qui est nulle quand m n'est pas un carré, se trouve, dans le cas contraire, exprimée par

$$f(2\sqrt{m}-1)+3f(2\sqrt{m}-3)+5f(2\sqrt{m}-5)+\ldots+(2\sqrt{m}-1)f(1).$$

De là cette formule qu'il était bon de transcrire :

$$(\vartheta)\;\left\{\begin{aligned}&\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta'' f(\delta''-2m')-\sum\sum(2d_2-\delta_2)f(2d_2+\delta_2)=0,\\&\text{ou } =f(2\sqrt{m}-1)+3f(2\sqrt{m}-3)+\ldots+(2\sqrt{m}-1)f(1),\end{aligned}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré.

Je rapprocherai des deux égalités (ζ) et (θ) une autre équation qui offre avec elles beaucoup d'analogie dans la forme et qui se tire de la même source, quoiqu'elle ne soit pas, comme les deux autres, comprise dans la formule (η).

En conservant toutes les notations ci-dessus et la condition de

$$f(-x)=f(x),$$

je considère les deux sommes

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta'' f(2^{\alpha''}d''+m'-\delta'')$$

et

$$\sum\sum(2d_2-2m_1-\delta_2)f(2d_2-m_1-\delta_2).$$

Ces deux sommes se trouvent être généralement égales entre elles : il ne peut y avoir exception que quand m est un carré, et alors l'excès

de la première sur la seconde s'exprime par

$$f(1-\sqrt{m})+3f(3-\sqrt{m})+5f(5-\sqrt{m})+\ldots+(2\sqrt{m}-1)f(\sqrt{m}-1).$$

Nous aurons donc l'équation ci-après :

$$(\iota)\quad\left\{\begin{array}{l}\quad\sum\sum(-1)^{m''-1}\delta''f(2^{\alpha''}d''+m'-\delta'')\\ -\sum\sum(2d_2-2m_1-\delta_2)f(2d_2-m_1-\delta_2)=0,\\ \text{ou }=f(1-\sqrt{m})+3f(3-\sqrt{m})+\ldots+(2\sqrt{m}-1)f(\sqrt{m}-1).\end{array}\right.$$

Voici enfin une formule où figureront encore nos deux modes de partition, mais où entrera une fonction $F(x)$ impaire, je veux dire telle, que l'on ait

$$F(-x)=-F(x),$$

pour toutes les valeurs de x employées. Cette formule exprime que les deux sommes

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}F(\delta'')$$

et

$$\sum\sum F(2d_2-2m_1-\delta_2)$$

sont égales entre elles quand m n'est pas un carré, mais, dans le cas contraire, ont une différence exprimée par

$$F(1)+F(3)+F(5)+\ldots+F(2\sqrt{m}-1).$$

On a donc

$$(\varkappa)\quad\left\{\begin{array}{l}\sum\sum(-1)^{m''-1}F(\delta'')-\sum\sum F(2d_2-2m_1-\delta_2)=0,\\ \text{ou }=F(1)+F(3)+F(5)+\ldots+F(2\sqrt{m}-1),\end{array}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré; et cette formule est sans contredit une des plus élégantes qui se soient présentées à nous dans le cours de nos recherches.

Mais tous ces résultats partiels sont contenus dans une seule formule, extrêmement générale, où figure une fonction $\mathcal{F}(x, y, z, t)$ de quatre variables, paire par rapport à x, y, z et impaire par rapport à t, je veux dire remplissant les conditions suivantes :

$$\mathcal{F}(-x, y, z, t) = \mathcal{F}(x, -y, z, t) = \mathcal{F}(x, y, -z, t) = \mathcal{F}(x, y, z, t)$$

et

$$\mathcal{F}(x, y, z, -t) = -\mathcal{F}(x, y, z, t),$$

pour toutes les valeurs des variables dont on aura à faire usage [*]. Considérons, d'une part, la somme

$$\sum\sum(-1)^{m''-1}\mathcal{F}(2^{\alpha''}d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''}d'' + m' - \delta'', \delta''),$$

qui concerne le mode de partition marqué par l'équation

$$m = m'^2 + m'' = m'^2 + 2^{\alpha''}d''\delta'',$$

et, d'autre part, la somme

$$\sum\sum\mathcal{F}(m_1, 2d_2 + \delta_2, 2d_2 - m_1 - \delta_2, 2d_2 - 2m_1 - \delta_2),$$

qui est au contraire relative à l'autre mode de partition ou à la formule

$$m = m_1^2 + 2m_2 = m_1^2 + 2d_2\delta_2.$$

Désignons par S la différence de ces deux sommes, en sorte que l'on ait

$$(\lambda)\quad \left\{\begin{aligned} S = {} & \sum\sum(-1)^{m''-1}\mathcal{F}(2^{\alpha''}d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''}d'' + m' - \delta'', \delta'') \\ & - \sum\sum\mathcal{F}(m_1, 2d_2 + \delta_2, 2d_2 - m_1 - \delta_2, 2d_2 - 2m_1 - \delta_2). \end{aligned}\right.$$

Notre théorème porte sur la différence S. Il consiste en ce que la va-

---

[*] Je n'exige pas que l'on ait $\mathcal{F}(x, y, z, 0) = 0$, parce que, dans la formule que je vais donner, t est essentiellement un entier impair, de manière que l'on n'a jamais $t = 0$.

leur de S est généralement nulle : il n'y a exception que quand m est un carré, et alors S s'exprime par cette suite très-simple

$$\begin{aligned}&\mathfrak{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-1,\ 1-\sqrt{m},\ 1)+\ldots\ldots\\&+\mathfrak{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-2s+1,\ 2s-1-\sqrt{m},\ 2s-1)+\ldots\ldots\\&+\mathfrak{F}(\sqrt{m},\ 1,\ \sqrt{m}-1,\ 2\sqrt{m}-1),\end{aligned}$$

dans le terme général de laquelle s prend les valeurs successives 1, $2,\ldots,\sqrt{m}$. En d'autres termes, on a

$$(\mu)\quad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{S}=0,\\&\text{ou }=\mathfrak{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-1,\ 1-\sqrt{m},\ 1)+\mathfrak{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-3,\ 3-\sqrt{m},\ 3)\\&\quad+\mathfrak{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-5,\ 5-\sqrt{m},\ 5)+\ldots+\mathfrak{F}(\sqrt{m},\ 1,\ \sqrt{m}-1,\ 2\sqrt{m}-1),\end{aligned}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré.

Les équations réunies (λ) et (μ) expriment parfaitement notre théorème. Nous comprenons pourtant qu'on désire le voir écrit dans une seule équation. Nous dirons donc, en résumé, que l'on a

$$(\nu)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum\sum(-1)^{m''-1}\,\mathfrak{F}(2^{\alpha''}d''+m',\ \delta''-2m',\ 2^{\alpha''}d''+m'-\delta'',\ \delta'')\\&-\sum\sum\mathfrak{F}(m_1,\ 2d_2+\delta_2,\ 2d_2-m_1-\delta_2,\ 2d_2-2m_1-\delta_2)=0,\\&\text{ou }=\mathfrak{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-1,\ 1-\sqrt{m},\ 1)+\mathfrak{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-3,\ 3-\sqrt{m},\ 3)\\&\quad+\mathfrak{F}(\sqrt{m},\ 2\sqrt{m}-5,\ 5-\sqrt{m},\ 5)+\ldots+\mathfrak{F}(\sqrt{m},\ 1,\ \sqrt{m}-1,\ 2\sqrt{m}-1),\end{aligned}\right.$$

suivant que m n'est pas ou est un carré.

Soit, par exemple, $m=3$. On aura pour le premier mode de partition ces diverses valeurs

$$\begin{aligned}&m'=0,\ 2^{\alpha''}d''=3,\ \delta''=1;\quad m'=0,\quad 2^{\alpha''}d''=1,\ \delta''=3;\\&m'=1,\ 2^{\alpha''}d''=2,\ \delta''=1;\quad m'=-1,\ 2^{\alpha''}d''=2,\ \delta''=1;\end{aligned}$$

qui donneront pour l'expression de la première de nos deux sommes

$$\mathfrak{F}(3,1,2,1)+\mathfrak{F}(1,3,-2,3)-\mathfrak{F}(3,-1,2,1)-\mathfrak{F}(1,3,0,1),$$

ce qui, d'après la nature de la fonction $\mathcal{F}$, se réduit à

$$\mathcal{F}(1, 3, 2, 3) - \mathcal{F}(1, 3, 0, 1).$$

Or pour le second mode de partition l'on a

$$m_1 = 1, \quad d_2 = 1, \quad \delta_2 = 1, \quad m_1 = -1, \quad d_2 = 1, \quad \delta_2 = 1.$$

La seconde somme est donc

$$\mathcal{F}(1, 3, 0, -1) + \mathcal{F}(-1, 3, 2, 3),$$

par suite elle est égale à la première et l'on a bien $S = 0$, vu que

$$\mathcal{F}(-1, 3, 2, 3) = \mathcal{F}(1, 3, 2, 3), \quad \mathcal{F}(1, 3, 0, -1) = -\mathcal{F}(1, 3, 0, 1).$$

Soit à présent $m = 4$. On devra trouver

$$S = \mathcal{F}(2, 3, 1, 1) + \mathcal{F}(2, 1, 1, 3),$$

et c'est en effet ce qui résulte des valeurs de m', $2^{\alpha''}d''$, δ'' et m_1, d_2, δ_2 qui sont ici respectivement

$$m' = 0, \quad 2^{\alpha''}d'' = 4, \quad \delta'' = 1;$$

$$m' = \pm 1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 3, \quad \delta'' = 1;$$

$$m' = \pm 1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 1, \quad \delta'' = 3;$$

et

$$m_1 = 0, \quad d_2 = 2, \quad \delta_2 = 1.$$

La première somme est ainsi

$$-\mathcal{F}(4, 1, 3, 1) + \mathcal{F}(4, -1, 3, 1) + \mathcal{F}(2, 3, 1, 1) + \mathcal{F}(2, 1, 1, 3) + \mathcal{F}(0, 5, -3, 3),$$

ce qui se ramène à

$$\mathcal{F}(2, 3, 1, 1) + \mathcal{F}(2, 1, 1, 3) + \mathcal{F}(0, 5, 3, 3):$$

quant à la seconde somme, elle se réduit ici au seul terme

$$\mathcal{F}(0, 5, 3, 3),$$

et en le retranchant des précédents, on tombe sur la valeur de S indiquée.

La formule contenue dans les deux équations (λ) et (μ) renferme comme cas particuliers toutes celles que nous avons données plus haut.

Pour retrouver la formule (η), il faut supposer la fonction $\mathfrak{F}(x, y, z, t)$ indépendante de z et proportionnelle à t, en un mot faire

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = f(x, y)\, t,$$

la fonction $f(x, y)$ étant d'ailleurs telle, que

$$f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y).$$

Cela donne tout d'abord la différence entre les deux séries

$$\sum\sum (-1)^{m''-1} \delta'' f(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m')$$

et

$$\sum\sum (2d_2 - 2m_1 - \delta_2) f(m_1, 2d_2 + \delta_2),$$

laquelle se trouve être zéro quand m n'est pas un carré, tandis que lorsque m est un carré, cette différence s'exprime par

$$f(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1) + 3f(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 3) + \ldots + (2\sqrt{m} - 1) f(\sqrt{m}, 1).$$

Il est clair que ce résultat coïncidera avec la formule (η) s'il est prouvé que

$$\sum\sum m_1 f(m_1, 2d_2 + \delta_2) = 0.$$

Or cette dernière équation résulte de ce double fait que l'on a

$$f(-x, y) = f(x, y)$$

et que les valeurs de m_1 qui ne sont pas nulles sont deux à deux égales et de signes contraires.

Pour retrouver la formule (ι), on supposera $\mathfrak{F}(x, y, z, t)$ indépendante de x, y et toujours proportionnelle à t, en sorte que

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = f(z)\, t,$$

sous la condition, bien entendu, que

$$f(-z) = f(z).$$

Enfin, pour retrouver la formule (κ), on réduira $\mathfrak{F}(x, y, z, t)$ à une simple fonction de t, naturellement impaire, c'est-à-dire on fera

$$\mathfrak{F}(x, y, z, t) = \mathrm{F}(t),$$

sous la condition de

$$\mathrm{F}(-t) = -\mathrm{F}(t).$$

On pourrait ajouter de nouveaux cas particuliers à ceux que nous venons de rappeler; mais la formule générale est assez simple pour que nous renoncions à insister là-dessus.

Nous n'entrerons non plus dans aucun détail sur le parti qu'on peut tirer des formules de cet article, soit dans la théorie des fonctions numériques, soit dans celle des suites infinies. Nous n'avons en ce moment pour objet que d'indiquer, sans les développer, nos principaux résultats. D'ailleurs, après ce qu'on a vu dans les articles précédents, les applications s'offriront d'elles-mêmes au lecteur.

MÉTHODE

POUR LA

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LITTÉRALES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. JOURDAIN,
Professeur à Poitiers.

Troisième degré.

Soit proposée l'équation suivante

(1) $$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^3 = m,$$

d'où

(2) $$x = \frac{b\sqrt[3]{m} - a}{1 - \sqrt[3]{m}}.$$

En développant les calculs indiqués dans l'équation (1) et en portant tout dans le même membre, il vient

$$(1-m)x^3 + 3(a-mb)x^2 + 3(a^2 - mb^2)x + a^3 - mb^3 = 0.$$

Si dans cette équation nous posons $m = \frac{a}{b}$, le deuxième terme disparaît et l'équation prend la forme suivante, après avoir divisé partout par le coefficient de x^3,

$$x^3 - 3abx - ab(a+b) = 0.$$

Pour identifier cette équation à l'équation générale du troisieme degré privée de son second terme $x^3 + px + q = 0$, il faut poser

$$-3ab = p, \quad -ab(a+b) = q,$$

d'où

$$ab = -\frac{p}{3}, \quad a+b = \frac{3q}{p}.$$

a et b sont donc les racines de l'équation suivante

$$y^2 - \frac{3q}{p}y - \frac{p}{3} = 0,$$

d'où

$$y = \frac{3q}{2p} \pm \frac{1}{6p}\sqrt{3(27q^2 + 4p^3)},$$

et, en séparant les racines

$$a = \frac{3q}{2p} + \frac{1}{6p}\sqrt{3(27q^2 + 4p^3)}, \quad b = \frac{3q}{2p} - \frac{1}{6p}\sqrt{3(27q^2 + 4p^3)}.$$

Si maintenant, nous reportant à l'expression (2), nous remplaçons m par $\frac{a}{b}$, la valeur de x deviendra

$$x = \frac{b\sqrt[3]{\frac{a}{b}} - a}{1 - \sqrt[3]{\frac{a}{b}}} = b\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + b\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^2,$$

ou bien encore

$$x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{a^2b}.$$

Cette dernière transformation s'obtient en observant que

$$b\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{ab^2} \quad \text{et} \quad b\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^2 = \sqrt[3]{a^2b}.$$

Pour obtenir la valeur de x en fonction de p et de q, il n'y a plus qu'à remplacer a et b par leurs valeurs en p et q, en remarquant, pour simplifier les calculs, que ab est égal à $-\frac{p}{3}$, et il viendra

$$(3)\ x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{3(27q^2 + 4p^3)}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{3(27q^2 + 4p^3)}}.$$

Cette valeur de x est précisément celle qu'on obtient par les méthodes ordinaires.

Parmi les neuf valeurs de cette expression, trois seulement sont les racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0;$$

il est tout aussi facile dans notre méthode que dans celles habituellement en usage, de déterminer ces trois valeurs.

Elles sont d'abord données sans ambiguïté par la formule

$$x = \frac{b\sqrt[3]{\frac{a}{b}} - a}{1 - \sqrt[3]{\frac{a}{b}}} = b\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + b\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^2,$$

où il n'y a qu'un seul radical cubique. De là on a déduit la formule à deux radicaux

$$x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{a^2 b};$$

mais le calcul même par lequel les deux nouveaux radicaux s'introduisent montre que leurs valeurs doivent être groupées de telle sorte que toujours le second radical soit égal au carré du premier divisé par b.

Si donc une des racines x est spécialement représentée par

$$x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{a^2 b},$$

les deux autres seront

$$x' = \alpha\sqrt[3]{ab^2} + \alpha^2\sqrt[3]{a^2 b}$$

et

$$x'' = \alpha^2\sqrt[3]{ab^2} + \alpha\sqrt[3]{a^2 b},$$

α et α^2 étant les valeurs imaginaires de $\sqrt[3]{1}$.

Quand a et b sont des quantités réelles, la première racine est naturellement fournie par la valeur arithmétique des radicaux.

Quatrième degré.

L'équation générale du quatrième degré privée de son second terme peut être résolue d'une manière analogue.

Posons

(I) $$\left(\frac{x^2 + ax + b}{x^2 + a'x + b'}\right)^2 = \frac{a}{a'}.$$

De cette équation il est facile de tirer la valeur de x en fonction des indéterminées a, b, a', b', valeur dont la recherche ne dépend que de la résolution d'une équation du deuxième degré.

En effectuant les calculs indiqués et en portant tout dans le même

membre, il vient

$$x^4 + \frac{aa'(a'-a)+2(ab'-ba')}{a-a'}x^2 + \frac{2aa'(b'-b)}{a-a'}x + \frac{ab'^2-a'b^2}{a-a'} = 0.$$

Si nous identifions cette équation à celle du quatrième degré privée de son second terme

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

nous aurons, en prenant $b' = 0$, les trois relations suivantes :

$$aa'(a'-a) - 2ba' = p(a-a'),$$
$$2aa'b = q(a'-a),$$
$$a'b^2 = r(a'-a).$$

En traitant ces trois équations, on arrive à la réduite suivante du troisième degré en b,

$$b^3 + \frac{8r^2}{q^2-4pr}b^2 + \frac{4pr^2}{q^2-4pr}b - \frac{8r^3}{q^2-4pr} = 0$$

et aux deux relations suivantes qui la complètent :

$$a = \frac{bq}{2r}, \quad a' = \frac{bq}{2(r-b^2)}.$$

Ces trois relations sont suffisantes pour la détermination des quantités a, a', b en fonction des coefficients p, q, r de l'équation du quatrième degré privée de son second terme, et par conséquent pour la détermination complète de x, qui, comme nous l'avons dit plus haut, peut être facilement tirée de l'équation (1), où l'on devra, bien entendu, faire aussi $b' = 0$.

SUR

LA RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES POSITIVES A TROIS INDÉTERMINÉES ENTIÈRES;

PAR M. G. LEJEUNE-DIRICHLET.

LU A L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE BERLIN LE 31 JUILLET 1848.

On sait que Lagrange a le premier montré que chaque forme binaire quadratique peut être *réduite*, c'est-à-dire peut être transformée en une autre forme équivalente dont les coefficients remplissent certaines conditions d'inégalité; et il a en même temps fait voir que dans chaque classe de formes positives il n'y a jamais qu'une seule de ces formes, de manière que pour ce cas les diverses formes réduites qui correspondent à un déterminant donné peuvent servir de représentantes aux diverses classes. Lorsque plus tard, dans les *Disquisitiones arithmeticæ*, les formes ternaires eurent été considérées d'un point de vue général, il devint nécessaire, pour le développement ultérieur de cette théorie, d'étendre aux formes ternaires positives les recherches que Lagrange avait faites sur les formes binaires, c'est-à-dire de trouver entre les coefficients des conditions d'inégalités telles, qu'elles fussent remplies dans chaque classe par une forme, et rien que par une. Cette extension, qui présente de grandes difficultés, a été faite par Seeber, dans un travail spécialement consacré aux formes ternaires positives, travail que Gauss, dans une Note très-intéressante (Journal de Crelle, t. XX, p. 312), caractérise comme il suit : « Nous » devons rendre pleine justice à l'esprit de profondeur avec lequel ce » sujet (la résolution du problème de trouver dans chaque classe » une forme réduite, et la démonstration qu'il ne s'y en trouve qu'une » seule) a été développé; et si nous devons en même temps regretter » la longueur de ces recherches, qui découragera peut-être beaucoup » de lecteurs, puisque la solution du problème occupe 41 pages, et la

» démonstration du théorème 91 pages, nous n'entendons cependant » en aucune manière blâmer cette longueur. Lorsqu'il se présente un » problème ou un théorème difficile à résoudre ou à démontrer, la » première chose à faire, et qui doit toujours être acceptée avec » reconnaissance, c'est avant tout de trouver une solution ou une » démonstration. La question de savoir si cela n'aurait pas pu avoir » lieu d'une manière plus facile et plus simple, demeure une question » oiseuse aussi longtemps que la possibilité n'en est pas en même » temps démontrée par le fait. Il est donc intempestif de s'arrêter ici » à cette question. »

La grande complication de la méthode de Seeber m'a engagé depuis longtemps à essayer d'établir la théorie des formes ternaires réduites d'une manière plus simple. En communiquant aujourd'hui à l'Académie le résultat de mes efforts, je crois, dans l'intérêt de la brièveté, et, si je puis m'exprimer ainsi, de la limpidité de l'exposition, devoir conserver la forme géométrique que j'ai employée dans mes recherches où j'ai pris pour base les rapports remarquables qui ont lieu entre les formes quadratiques à deux ou trois éléments et certaines constructions géométriques à trois dimensions. Je commence par le développement des indications déjà données par Gauss sur ces rapports dans la Note mentionnée plus haut.

§ I.

La forme ternaire

$$(1) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy = \varphi,$$

dans laquelle nous considérons x, y, z comme premier, deuxième et troisième élément, s'appelle *positive* lorsque φ ne devient jamais négatif pour des valeurs réelles de ces éléments. Dans une pareille forme les coefficients

$$a,\ b,\ c,$$

sont toujours positifs, tandis que les fonctions de coefficients

$$(2) \qquad \begin{cases} a'^2 - bc, \quad b'^2 - ac, \quad c'^2 - ab, \\ aa'^2 + bb'^2 + cc'^2 - abc - 2a'b'c' = -D, \end{cases}$$

dont la dernière — D s'appelle le *déterminant de la forme*, sont négatives [*]. En vertu de ces conditions, il y a toujours trois angles aigus ou obtus entièrement déterminés par les équations

$$\cos\lambda = \frac{a'}{\sqrt{bc}}, \quad \cos\mu = \frac{b'}{\sqrt{ac}}, \quad \cos\nu = \frac{c'}{\sqrt{ab}},$$

et avec lesquels on peut former un angle trièdre, puisque la condition nécessaire pour cela

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu < 1$$

coïncide avec $D > 0$. Mais comme avec les mêmes angles λ, μ, ν on peut former deux angles trièdres symétriques l'un de l'autre, nous conviendrons de choisir toujours celui de ces deux angles trièdres dont les arêtes, respectivement opposées à ces angles, se suivent de droite à gauche par rapport à une droite qui, partant du sommet O, irait en s'élevant dans l'intérieur de l'angle solide. Si nous considérons maintenant les trois arêtes comme les axes positifs d'un système de coordonnées, nous pouvons rapporter tout l'espace infini à notre forme, en regardant les produits $x\sqrt{a}$, $y\sqrt{b}$, $z\sqrt{c}$ comme les coordonnées d'un point quelconque de cet espace, et φ exprime alors le carré de la distance de ce point au sommet, ou encore, plus généralement, le carré de la distance de deux points dont les coordonnées correspondantes ont ces produits pour différences. Si l'on forme maintenant avec trois nouveaux éléments indéterminés, x', y', z', les expressions linéaires

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \quad y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ \qquad z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z', \end{array}\right.$$

avec la seule restriction que le déterminant formé des neuf coefficients α, β, ..., savoir :

$$(4)\qquad \alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\beta'\alpha'' - \alpha\gamma'\beta'' - \beta\alpha'\gamma'' = E,$$

ne soit pas nul, φ sera transformée en une nouvelle forme φ', par rap-

[*] *Disquisit. arithm.*, art. 271.

port à laquelle toutes les quantités correspondantes seront désignées par les mêmes lettres accentuées. Si l'on fait encore correspondre un espace infini à cette nouvelle forme, deux espaces infinis se trouveront rapportés l'un à l'autre point par point, puisque deux points se correspondent toujours lorsque dans les expressions de leurs coordonnées

$$x\sqrt{a},\quad y\sqrt{b},\quad z\sqrt{c};\quad x'\sqrt{a'},\quad y'\sqrt{b'},\quad z'\sqrt{c'},$$

les éléments x, y, z, x', y', z' se trouvent liés par les équations (3). Lorsque les expressions ci-dessus sont les différences de coordonnées pour deux couples de points correspondants, les mêmes rapports ont évidemment encore lieu entre $x, y, \ldots$; d'où il suit, d'après ce qui précède, et à cause de $\varphi = \varphi'$, que la distance de deux points d'un des espaces est égale à la distance des points correspondants de l'autre.

Les deux espaces comparés point par point l'un à l'autre sont donc égaux ou symétriques, c'est-à-dire qu'on peut, en faisant coïncider les points initiaux O et O', les mettre dans une position telle, que chaque point tombe ou sur son point correspondant ou sur le point opposé de celui-ci, si nous appelons, pour abréger, *points opposés* deux points du même espace qui se trouvent à égale distance à partir de l'origine et sur des directions opposées. Pour déterminer lequel de ces deux cas a eu lieu, il faut, dans l'un des espaces, tirer à partir du sommet des droites vers trois points quelconques, ensuite examiner si les droites tirées dans l'autre espace à partir de son sommet vers les points correspondants présentent une succession semblable ou inverse. Si l'on prend, par exemple, dans le second espace, les droites tirées aux points ayant pour coordonnées

$$\sqrt{a'},\ 0,\ 0;\quad 0,\ \sqrt{b'},\ 0;\quad 0,\ 0,\ \sqrt{c'};$$

ces lignes, qui tombent sur les axes positifs du second espace, se suivront, d'après la convention ci-dessus, de droite à gauche. Pour les points correspondants dans le premier espace, on a les coordonnées

$$\alpha\sqrt{a'},\ \alpha'\sqrt{a'},\ \alpha''\sqrt{a'};\quad \beta\sqrt{b'},\ \beta'\sqrt{b'},\ \beta''\sqrt{b'};\quad \gamma\sqrt{c'},\ \gamma'\sqrt{c'},\ \gamma''\sqrt{c'}.$$

Pour déterminer si les lignes dirigées vers ces points se suivent de droite à gauche, c'est-à-dire comme les axes du premier espace, ou

dans l'ordre inverse, on peut se servir de la proposition connue [*], ou qu'on peut du moins facilement déduire de propriétés connues, d'après laquelle les droites menées aux trois points de coordonnées

$$\xi,\ \eta,\ \zeta;\quad \xi',\ \eta',\ \zeta';\quad \xi'',\ \eta'',\ \zeta'',$$

se suivent ou dans le même ordre que les axes des ξ, η, ζ, ou dans l'ordre contraire, selon que le déterminant formé des neuf coordonnées est positif ou négatif, lorsqu'on y donne au terme $\xi\eta'\zeta''$ le signe positif. Pour notre cas ce déterminant devient $E\sqrt{a'b'c'}$; il y a donc congruence ou symétrie, selon que E est positif ou négatif.

Jusqu'ici les éléments x, y, z avaient des valeurs quelconques. Si maintenant ils ne doivent plus exprimer que des nombres entiers, nous aurons, au lieu de l'espace entier, un système infini de points disposés en forme de parallélipipèdes, c'est-à-dire un système de points formé par les sections de trois systèmes de plans parallèles équidistants.

Si nous supposons encore que les coefficients de substitution α, β,... sont aussi des nombres entiers, et que E a la valeur ± 1, il correspondra à chaque combinaison de nombres entiers x, y, z une combinaison de nombres entiers x', y', z', et réciproquement. Les systèmes parallélipipédiques, comparés de cette manière l'un à l'autre, peuvent, d'après ce qui précède, être mis dans une position telle, que l'un coïncide avec l'autre ou avec les points opposés de celui-ci. Ces deux cas ne diffèrent cependant pas l'un de l'autre, puisque les points opposés des points d'un pareil système forment de nouveau le même système. Cela résulte aussi de ce que φ' reste invariable lorsqu'on prend α, β,... avec des signes contraires, ce qui change E en $-$E. Les deux systèmes sont donc toujours égaux, et l'on voit que les systèmes correspondants à deux formes ternaires équivalentes φ et φ' répondent à la même figure dans l'espace avec deux dispositions différentes. Réciproquement, à deux dispositions parallélipipédiques différentes quelconques du même système correspondent des formes équivalentes. Car si l'on prend un point quelconque du système pour origine commune, on a entre les coordonnées relatives aux deux systèmes d'axes, et par con-

[*] *Disquisit. gen. cir. superf. cur., auct.* C.-F. Gauss, § I, VII.

sequent aussi entre les éléments qui leur sont proportionnels x, y, z; x', y', z' des équations linéaires sans terme constant, c'est-à-dire des équations de la forme (3), et comme, d'après notre supposition, lorsque x, y, z sont des nombres entiers, x', y', z' doivent l'être aussi, et réciproquement, il suit que $\alpha, \beta, \ldots$ sont également des nombres entiers, et que $E = \pm 1$. D'un autre côté, pour des valeurs entières correspondantes des éléments, on a $\varphi = \varphi'$, et cette équation a donc aussi identiquement lieu; ce qui était à prouver.

Des relations semblables ont lieu entre une forme binaire positive

$$lx^2 + 2mxy + ny^2$$

et un système de points disposés parallélogrammatiquement. Si l'on prend ici deux axes inclinés l'un sur l'autre d'un angle θ déterminé par l'équation

$$\cos\theta = \frac{m}{\sqrt{ln}},$$

en agissant toujours d'une manière uniforme pour distinguer ces axes et choisissant, par exemple, le second axe à gauche du premier après qu'un côté déterminé du plan a été désigné comme le côté supérieur, et si l'on considère $x\sqrt{l}$, $y\sqrt{n}$ comme des coordonnées, on obtient un système de points entièrement déterminé par la forme quadratique, lesquels points peuvent être considérés comme les intersections de deux systèmes de lignes parallèles équidistantes. S'il existe alors entre deux formes ce qu'on appelle l'équivalence propre, de manière que dans les équations de substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

$\alpha\delta - \beta\gamma$ soit égal à l'unité positive, les systèmes correspondants pourront, par un mouvement dans le plan, être amenés à coïncider, tandis que dans l'autre cas, où $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, il faut généralement pour atteindre ce but retourner un des systèmes.

§ II.

Après avoir établi dans ce qui précède la relation qui existe entre

les formes quadratiques et certaines constructions géométriques. il reste à développer quelques autres propriétés de ces constructions. Pour abréger, nous appellerons un système de points disposés parallélogrammatiquement ou parallélipipédiquement un système de deuxième ou de troisième ordre, et une suite infinie de points équidistants en ligne droite un système de premier ordre.

Le caractère commun de ces trois sortes de systèmes consiste évidemment en ceci, que lorsque, par un mouvement sans rotation que nous nommerons translation, un de ces systèmes est amené dans une position différente telle, qu'un de ses points arrive à la place occupée auparavant par un autre de ces mêmes points, la même chose a lieu pour tous les points, de manière que le système, dans sa nouvelle position, coïncide complétement avec le système dans sa position initiale. Il est facile de voir que la faculté de translation dont nous venons de parler caractérise complétement les trois sortes de systèmes, et qu'un système doué de ce caractère, lorsqu'il est situé sur une droite et qu'il contient deux points, lorsqu'il est situé dans un plan et qu'il contient trois points non placés sur une droite, ou enfin lorsqu'il contient au moins quatre points non placés dans un plan, sera respectivement un système de premier, de deuxième et de troisième ordre.

Si l'on a, par exemple, un système de points situés tous sur la même droite et que a et a' soient deux points voisins, un glissement qui fera arriver a en a' amènera a' en a'', d'où

$$a'a'' = aa';$$

le point a'', qui est aussi éloigné de a' que a' l'est lui-même de a, appartient donc également au système, et ce système n'a pas de point entre a' et a'', puisqu'un tel point se serait trouvé avant le mouvement entre a et a'. Comme cette considération peut se continuer des deux côtés du point a indéfiniment, la proposition est démontrée.

Soient maintenant dans un système plan, doué de la propriété relative à la translation, a et a' deux points voisins, de manière que sur la droite aa' il ne se trouve entre a et a' aucun point du système. Puisque par la translation de a en a' la droite infinie aa' glisse sur elle-même, il en résulte que tous les points du système sur cette droite forment un système $\ldots{}''a\,'aa'a''\ldots$ du premier ordre. Comme le système,

d'après la supposition, a au moins encore un point en dehors de cette droite, soit b un des points les plus voisins de cette droite. Si maintenant on effectue une translation par laquelle a arrive en b, le système de premier ordre prendra la nouvelle position $\ldots{}'b'bbb'b''\ldots$, et appartiendra dans celle-ci au système primitif; il est clair en même temps qu'aucun point du système ne peut se trouver ni entre les points $\ldots{}''b, 'b, b, b', b'',\ldots$ ni entre les droites $\ldots{}'bbb'\ldots$, $\ldots{}'aaa'\ldots$.

Si l'on continue à raisonner ainsi, on voit que tout le système peut être disposé parallélogrammatiquement et qu'on peut choisir $aa'b'b$ pour parallélogramme fondamental de ce système. Nous ajouterons encore que par la construction indiquée on pourra évidemment obtenir tous les arrangements parallélogrammatiques dont le système est susceptible. Cela résulte de ce que le choix de a', sauf la restriction évidemment nécessaire qu'il ne se trouve pas de point entre a et a', est arbitraire, et qu'ensuite b peut être pris arbitrairement dans la ligne parallèle la plus proche.

Si l'on a enfin un système doué de la faculté de translation et contenant au moins quatre points non situés dans le même plan, faisons passer un plan par trois points quelconques de ce système non situés en ligne droite. Comme par chaque translation effectuée parallèlement à ce plan celui-ci glisse sur lui-même, les points qui y sont situés forment, d'après ce qui précède, un système de second ordre. Après avoir partagé ce système parallélogrammatiquement d'une manière quelconque, prenons un des autres points du système de troisième ordre les plus rapprochés du plan, et faisons subir au système un déplacement tel, qu'un point quelconque du plan arrive au point déjà choisi en dehors de ce plan. Par la répétition de ce mouvement et du mouvement en sens contraire, on obtient évidemment une disposition parallélipipédique du système donné, et en même temps il est clair que la construction indiquée a la généralité nécessaire, puisque le choix du premier plan, la disposition du système de deuxième ordre dans ce plan, et enfin le choix du point dans le plan immédiatement voisin sont arbitraires.

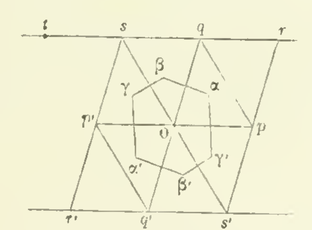
Nous montrerons encore, pour finir ce paragraphe, que de quelque manière qu'on partage le même système de deuxième ou de troisième ordre, le parallélogramme ou le parallélipipède servant de

base à chaque division conservent toujours la même aire ou le même volume, ce qui est l'interprétation géométrique de cette proposition, que des formes équivalentes ont des déterminants égaux. En effet, si l'on imagine dans le plan d'un système de deuxième ordre une ligne fermée, par exemple une circonférence de cercle, qu'on désigne par z la surface qu'elle renferme et par s le nombre des points dans l'intérieur de la ligne, en remarquant qu'il est indifférent de compter ou non les points qui se trouvent sur la circonférence, le quotient $\frac{z}{s}$, pour des valeurs croissantes du rayon, aura évidemment pour limite l'aire d'un parallélogramme fondamental, d'où ressort la proposition pour les systèmes de deuxième ordre, puisque s et z sont indépendants du mode d'arrangement du système. L'exactitude de la proposition pour des systèmes du troisième ordre se démontre tout à fait de la même manière.

§ III.

Nous allons maintenant faire voir qu'un système de deuxième ordre peut toujours se diviser en prenant pour base un parallélogramme dont les côtés ne sont pas plus grands que ses diagonales.

1. Soit o un point quelconque du système. Les autres points sont



toujours situés par couples à égale distance de o et sur des directions opposées. Soit maintenant p un des points du couple pour lequel la distance à o est plus petite que pour tout autre couple. Si cette plus courte distance est la même pour plusieurs couples, on peut choisir p arbitrairement dans l'un de ces couples. Le système donné consiste en un nombre infini de systèmes de premier ordre égaux et équidistants entre eux, et dont fait partie celui auquel o et p appartiennent. Dans l'un des deux systèmes qui avoisinent celui-ci, prenons le point q qui

est le plus rapproché de o, ou, si la plus courte distance est la même pour deux points, prenons arbitrairement l'un quelconque d'entre eux. Le parallélogramme $poqr$ ainsi obtenu jouit des propriétés demandées, puisque, d'après la construction,

$$op \leqq oq, \quad oq \leqq or, \quad oq \leqq os = pq.$$

Nous appellerons dorénavant parallélogramme réduit un parallélogramme fondamental qui remplit ces conditions.

2. Nous avons maintenant à établir les relations entre un pareil parallélogramme et le système plan auquel il appartient. Si $poqr$ est un parallélogramme réduit, nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer que l'angle poq n'est pas obtus, puisque, dans le cas contraire, l'angle en o pour le parallélogramme adjacent et appartenant au même arrangement est aigu, et de même nous pouvons supposer $op \leqq oq$. Alors il est évident que $or > oq$, et nous n'avons plus à considérer que la condition $pq \geqq oq$. Cela posé, en faisant, pour abréger,

$$op = \sqrt{l}, \quad oq = \sqrt{n},$$

de manière, par conséquent, que $l \leqq n$, la relation de notre parallélogramme avec l'ensemble du système de points pourra s'exprimer en disant que le minimum de la distance d'un point quelconque du système au point o est égal à $\sqrt{l}$, et que, après qu'on a choisi un point à cette distance, alors, en considérant toutes les autres directions, c'est-à-dire en excluant la droite menée de o à ce point, le second minimum est égal $\sqrt{n}$. Ce que nous venons de dire est vrai d'une manière tout à fait générale. Ce que nous allons maintenant ajouter, savoir que le premier minimum n'a lieu que pour le point p (de deux points opposés nous n'en mentionnons jamais qu'un) et le second minimum que pour le point q, est soumis aux exceptions suivantes :

1°. Si

$$op < oq, \quad oq = pq = os,$$

le premier minimum n'a lieu que pour p, le second que pour q ou s.

2°. Si

$$op = oq, \quad oq < pq = os,$$

les minima sont égaux et l'on peut échanger entre eux p et q.

3°. Enfin si

$$op = oq = pq = os,$$

on peut choisir l'un des points p, q, s comme premier point, et ensuite prendre l'un des autres comme second point.

Pour prouver ce que nous avançons, il suffit évidemment, puisque des points opposés sont toujours à égale distance de o, de faire voir que q est situé plus près de o, 1° que tous les autres points situés sur la droite sqr, à l'exception du point s dont la distance au point o est par supposition $= os = pq \geqq oq$, et 2° que tous les points des lignes parallèles suivantes.

Puisque l'on a

$$pq \geqq op, \quad pq \geqq oq,$$

et que l'angle poq n'est pas obtus, il en résulte que le triangle opq, et par conséquent aussi le triangle oqs qui lui est égal, n'ont pas d'angle obtus. La perpendiculaire abaissée de p sur qs tombe donc entre s et q (inclusivement), ce qui prouve le premier point.

Si l'on pose

$$\cos poq = \frac{m}{\sqrt{ln}},$$

où par conséquent m n'est pas négatif, on a

$$\overline{pq}^2 = l - 2m + n \geqq \overline{oq}^2 = n,$$

et, par conséquent,

$$2m \leqq l, \quad 2m \leqq n, \quad 4m^2 \leqq ln.$$

Si l'on fait encore le carré de la hauteur de notre parallélogramme $= k$ ($op = \sqrt{l}$ étant considéré comme base), on obtient, pour le carré Δ de son aire,

$$\Delta = lk = ln - m^2 \geqq \frac{3}{4} ln,$$

et, par conséquent,

$$\sqrt{k} \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3n}.$$

D'après cela, la seconde ligne parallèle est déjà éloignée d'au moins

$$\sqrt{3n} = \overline{oq}.\sqrt{3},$$

et ainsi se trouve également prouvé le deuxième point.

3. Comme les minima successifs $\sqrt{l}$, $\sqrt{n}$ se trouvent déterminés par le système même et indépendamment de tout arrangement déterminé de ce système, et que, d'autre part, ainsi que nous venons de le voir, ils coïncident quant à la grandeur avec les côtés du parallélogramme réduit, on voit que, lorsque le système permet divers arrangements de cette sorte, les côtés des parallélogrammes réduits conserveront toujours les valeurs $\sqrt{l}$ et $\sqrt{n}$. On obtiendra donc nécessairement tous les parallélogrammes fondamentaux possibles, en menant à partir de o des lignes vers tous les points les plus rapprochés (toujours à l'exclusion des points opposés), et prenant ensuite sur une des lignes parallèles les plus voisines dans chaque cas le point ou les deux points les plus voisins; et comme, d'après ce qui vient d'être démontré (n° **2**), ce point ou ces deux points les plus voisins sont situés plus près de o que tous les points des lignes parallèles suivantes, on peut faire abstraction de la condition qui veut que les seconds points soient pris sur la première ligne parallèle. On obtiendra donc tous les arrangements possibles du système en combinant o successivement avec tous les couples de points pour lesquels les minima successifs ont lieu, d'où il résulte de suite, en se reportant au n° **2**, que dans le cas général et dans le deuxième des cas mentionnés ci-dessus, il n'existe qu'un de ces arrangements, tandis que dans le premier et dans le troisième cas exceptionnel il y a respectivement deux et trois arrangements du système.

Dans notre notation actuelle, les cas singuliers que nous venons de mentionner correspondent aux suppositions

$$2m = l < n, \quad 2m < l = n, \quad 2m = l = n.$$

§ IV.

Nous n'avons traité jusqu'ici que des propriétés des figures géométriques qui peuvent être considérées comme la représentation gra-

phique de propositions connues de la théorie des formes, et qui ont déjà été indiquées dans le Mémoire mentionné dans l'Introduction. Il y a maintenant encore un problème d'un autre genre à résoudre, problème qui consiste, étant donné un système de deuxième ordre et dans ce système un point déterminé o, à trouver la partie du plan dans l'intérieur de laquelle chaque point est plus près du point o que de tout autre point du système. Comme la condition qu'un point ne soit pas plus éloigné de o que d'un autre point v consiste en ce que ce point se trouve avec o du même côté de la perpendiculaire élevée sur le milieu de ov, nous aurons donc à combiner o avec tous les autres points du système et à construire le polygone convexe formé par toutes les perpendiculaires correspondantes. Mais, parmi ces perpendiculaires en nombre infini, on n'en a à considérer qu'un nombre limité, puisque les autres ne rencontrent pas le polygone déterminé par celles-ci. Nous conservons toutes les suppositions précédentes, de telle sorte que, dans le parallélogramme réduit poq, on a

$$op \leqq oq,$$

l'angle poq n'est pas obtus et opq, oqp sont aigus. Cela posé, on prouve facilement qu'on n'a à considérer que les six sommets p, q, s, p', q', s' des quatre parallélogrammes qui se touchent en o, et que les perpendiculaires elles-mêmes correspondantes à s et s' ne font que raser la figure à former, dans le cas particulier où poq est un angle droit; mais, dans ce cas, la même chose a lieu pour les perpendiculaires correspondantes à r et r'. Si l'on mène les droites pq, os, $p'q'$, os', on obtient les six triangles égaux

$$poq,\quad qos,\quad sop',\quad p'oq',\quad q'os',\quad s'op.$$

En ne considérant que les points p, q, s, p', q', s', on a à élever des perpendiculaires aux milieux des droites allant de ces points à o, c'est-à-dire à faire la même construction que si l'on voulait trouver pour les triangles en question les centres des cercles circonscrits. Comme dans ces triangles il ne se trouve pas d'angles obtus, deux perpendiculaires consécutives ne se couperont pas en dehors du triangle correspondant. On obtient ainsi l'hexagone $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ ayant pour centre o

et dont les angles et les côtés opposés sont égaux, pour l'espace dans l'intérieur duquel chaque point est moins éloigné de o que de l'un des points p, q, s, p', q', s', et l'on se convainc facilement que, à l'exception de r et r', les perpendiculaires correspondantes aux autres points n'atteignent pas notre hexagone. On peut, pour cette démonstration, se borner, à cause de la symétrie, aux points situés au dedans et au-dessus de pop'. Pour les points situés au dedans de pop', cela est évident; pour les autres, cela résulte de ce que leur distance à o est plus grande que le diamètre du cercle circonscrit à l'hexagone. Si l'on appelle ρ le carré de son rayon, on aura

$$4\rho = \frac{ln(l - 2m + n)}{\Delta},$$

d'où, à cause de

$$2m \leqq l, \quad 2m \leqq n, \quad \Delta \geqq \frac{3}{4} ln,$$

il suit

$$4\rho \leqq \frac{4}{3}(l - 2m + n) \leqq \frac{8}{3} n.$$

Maintenant comme pour les points de la deuxième ligne parallèle et des suivantes, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, le carré de leur distance à o est au moins égal à $3n$, il ne reste plus qu'à considérer les points situés sur $tsqr$, à l'exception de s, q, r. Mais de tous ceux-ci aucun n'est plus près de o que t, pour lequel le carré de la distance $= 4l - 4m + n > 4\rho$, ainsi qu'on le voit de suite en multipliant par Δ et en ayant égard ensuite à ce que $2m \leqq l \leqq n$. Quant au point r, on se convainc de la même manière que le carré de sa distance à o, c'est-à-dire $l + 2m + n$ est $> 4\rho$, en exceptant le seul cas de $m = 0$, dans lequel la perpendiculaire correspondante rase la figure. Il est donc démontré que chaque point dans l'intérieur de l'hexagone $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ est plus près du point o que d'aucun autre point du système, et qu'il n'y a que ces points intérieurs qui soient dans ce cas. De chaque côté, la distance à o devient égale à la distance à un deuxième point, qui est, par exemple pour $\alpha\beta$, le point q, et chaque sommet de la figure est à égale distance de o et de deux autres points du système. Ce dernier énoncé ne subit de modification que dans le cas particulier où l'angle poq est droit; alors β et γ, β' et γ' coïncident

et l'hexagone devient un rectangle dont les sommets sont également éloignés de o et de trois autres points du système.

Il va sans dire qu'on obtiendra toujours le même hexagone quel que soit celui des parallélogrammes réduits qu'on prenne pour base de la construction dans les cas singuliers où il en existe plus d'un ; de même il est clair que les hexagones ou les quadrilatères correspondants à tous les points du système sont égaux et couvrent tout le plan de ce système.

Nous remarquerons encore, comme il est facile de s'en convaincre, que l'expression $\rho = \frac{ln(l-2m+n)}{4(ln-m^2)}$ va en décroissant, lorsque, l et n étant supposés constants, on y fait croître m de zéro jusqu'à sa limite $\frac{1}{2}l$, de manière que l'on a, par conséquent,

$$(1) \qquad \rho \leqq \frac{1}{4}(l+n) \leqq \frac{1}{2}n.$$

On a encore l'inégalité suivante

$$(2) \qquad 2\Delta(n-\rho) \geqq ln^2,$$

dont l'exactitude devient manifeste lorsque après avoir multiplié par 2, on transporte tous les termes dans le même membre, et qu'on y fait ensuite

$$\Delta = ln - m^2, \quad 4\Delta\rho = ln(l-2m+n),$$

ce qui la change en

$$ln(l-2m) + 2mn(n-l) \geqq 0.$$

§ V.

Nous arrivons maintenant à notre objet principal, et nous avons à montrer que chaque système du troisième ordre peut avoir pour base un parallélipipède dont les faces sont des parallélogrammes réduits et dont les arêtes, qui sont toujours égales quatre à quatre, ne surpassent pas ses diagonales. Après avoir fixé un point quelconque (o) du système, choisissons un point (1) dans le couple de points opposés

pour lesquels la distance à (o) est un minimum, ou, si le minimum de distance a lieu pour plusieurs couples, choisissons-le dans un quelconque de ces couples. Parmi tous les points en dehors de la droite (o1) choisissons encore un des deux plus voisins (2), en remarquant que le choix est encore arbitraire entre des couples pour lesquels la plus courte distance est la même. Comme dans tout le système, à l'exception des points de la droite (o1), aucun point n'est situé plus près de (o) que (2), la même chose a aussi lieu pour le plan (1o2), et pour le système contenu dans ce plan, (1o2) est un parallélogramme réduit (§ III, n° 5). Si l'on prend maintenant dans l'un des deux plans parallèles les plus voisins le point le plus rapproché de (o) ou l'un des plus rapprochés lorsque le minimum a lieu pour plus d'un point, et qu'on joigne (o) avec le point choisi (3), le parallélipipède construit sur les arêtes (o1), (o2), (o3) satisfera à la condition voulue, ainsi qu'il est facile de le voir. D'abord il résulte de la construction que l'on a

$$(o1) \leqq (o2) \leqq (o3).$$

Comme il est déjà prouvé pour les bases du parallélipipède (nous nommerons toujours ainsi les faces opposées dans lesquelles se trouvent les deux arêtes qui ne surpassent pas la troisième en grandeur, et nous appliquerons le nom de *faces latérales* aux quatre autres) qu'elles sont réduites, il ne nous reste plus qu'à montrer, au moyen de la double inégalité ci-dessus, que les quatre diagonales des faces latérales, ainsi que les quatre diagonales du solide, ne sont pas plus petites que (o3). Mais ces huit diagonales, comme on le voit de suite, sont égales en grandeur aux huit lignes de jonction qui peuvent être menées de (o) aux huit points situés dans le plan de la base supérieure autour de (3), en désignant ainsi, pour plus de commodité, les huit sommets des quatre parallélogrammes qui se touchent en (3). Or il résulte de la condition d'après laquelle (3) a été choisi, qu'aucune de ces lignes de jonction n'est plus petite que (o3).

Après nous être convaincu qu'un système du troisième ordre peut toujours être divisé suivant un parallélipipède réduit, nous avons maintenant à établir les relations entre un tel parallélipipède et le système, et en particulier à comparer entre elles les distances des points du

système à (o). Nous poserons

$$(o1) = \sqrt{a}, \quad (o2) = \sqrt{b}, \quad (o3) = \sqrt{c},$$

et nous conserverons toujours la supposition $a \leqq b \leqq c$.

1°. Dans le plan de la base les relations discutées plus haut (§ III, n° 2) ont lieu de telle manière, que les minima successifs de la distance sont toujours ici, par ordre de grandeur, $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$. Dans les cas singuliers mentionnés au même endroit, le choix des points est alors arbitraire.

2°. Considérons maintenant les points en dehors du plan de la base inférieure, et d'abord ceux qui sont situés dans le plan de la base supérieure. Comme, d'après la supposition que notre parallélipipède est un parallélipipède réduit, la ligne (o3) n'est pas plus grande qu'une des droites menées de (o) aux huit points situés autour de (3), alors le pied de la perpendiculaire abaissée de (o) sur le plan de la base supérieure ne sera pas plus éloigné de (3) que de l'un des huit points en question. Ce pied, par conséquent, ne tombe pas en dehors de l'hexagone ou du rectangle appartenant à (3) et construit dans le paragraphe précédent. Il peut arriver que de ces huit points, par exception, l'un soit situé aussi près du pied de la perpendiculaire que le point (3) lorsque ce pied tombe sur un côté, ou que cela arrive pour deux (ou pour trois quand le polygone devient un rectangle) quand le pied coïncide avec un sommet, tandis que tous les autres points du plan en sont plus éloignés. Il s'ensuit que la plus courte distance de (o) à un point de la base supérieure est $\sqrt{c}$, qu'elle n'a cette valeur en général que pour (3), mais qu'elle peut, par exception, avoir encore cette même valeur pour un, deux et même trois autres points.

3°. Pour l'examen des plans parallèles suivants, nous avons à déterminer une limite pour le carré h de la perpendiculaire déjà mentionnée. Comme le pied de cette perpendiculaire ne tombe pas en dehors de l'hexagone appartenant à (3), l'on a

$$h \geqq c - \rho,$$

ρ indiquant le carré du rayon du cercle circonscrit. Mais, d'après le § IV, on a aussi

$$\rho \leqq \frac{1}{2} b \leqq \frac{1}{2} c, \quad \text{donc} \quad h \geqq \frac{1}{2} c.$$

Comme, par conséquent, le deuxième plan parallèle est déjà éloigné d'au moins $\sqrt{2c}$, il ne se trouve au-dessus de la base supérieure que des points dont la distance à (o) est plus grande que $\sqrt{c}$.

Si l'on récapitule ce que nous avons dit, on verra que le minimum de la distance a la valeur $\sqrt{a}$ pour tout le système, qu'après qu'un point a été choisi à cette distance, le minimum dans les autres directions est de $\sqrt{b}$, et qu'enfin, après que le deuxième point a aussi été fixé, la plus petite distance de (o) pour tous les points en dehors du plan déterminé par o et les deux premiers points se réduit à $\sqrt{c}$. Mais bien que les minima successifs $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ soient toujours entièrement déterminés quant à leur grandeur, cette détermination, quant à leur situation, présente quelques exceptions faciles à énumérer. Si par exemple $a \leqq b$, $b < c$, il faudra choisir les deux premiers points sur la base inférieure, et les cas singuliers mentionnés (§ III, n° 2) peuvent alors avoir lieu, tandis que le troisième point est situé sur la base supérieure, où il a en général une position déterminée, mais où il peut cependant, dans des cas singuliers, occuper deux, trois ou quatre positions différentes. On voit avec la même facilité quelles sont les diverses circonstances qui peuvent avoir lieu dans les autres cas où l'on a

$$a < b = c, \quad \text{ou bien} \quad a = b = c.$$

Puisque de la supposition d'un parallélipipède réduit ayant pour arêtes $\sqrt{a} \leqq \sqrt{b} \leqq \sqrt{c}$, il est résulté que les longueurs de ces arêtes se sont trouvées être les minima successifs du système, il s'ensuit immédiatement que s'il existe plusieurs parallélipipèdes réduits suivant lesquels le système puisse être ordonné, ils s'accorderont tous quant à la longueur des arêtes, et il est facile de montrer que trois lignes ayant pour longueurs $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, et dirigées de (o) vers des points du système, pourvu qu'elles ne soient pas situées dans un même plan, sont toujours les arêtes d'un parallélipipède réduit. Il suffit, pour cela, des simples considérations déjà employées dans un cas semblable (§ III, n° 3). Comme d'après cela on obtient tous les parallélipipèdes réduits du système en construisant les minima successifs de toutes les manières possibles, il est clair que lorsque cela ne

peut avoir lieu que d'une seule manière (et nous y comprenons le cas où deux des trois quantités $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, ou même toutes les trois étant égales entre elles, les trois lignes sont complétement déterminées de position, et qu'il ne peut y avoir qu'un échange entre deux d'entre elles ou entre toutes les trois), le système de troisième ordre n'admet qu'un seul arrangement suivant un parallélipipède réduit. Dans tous les autres cas, il y a plusieurs de ces arrangements qui ont pour bases des parallélipipèdes qui sont ou tous différents les uns des autres, ou qui peuvent être en partie ou même tous ensemble égaux les uns aux autres (c'est ainsi que, dans les deux cas singuliers d'un système de deuxième ordre dont il a été question plus haut, les parallélogrammes réduits servant de bases aux deux ou trois arrangements différents étaient égaux entre eux).

Pour décider la question de savoir si un système du troisième ordre n'admet qu'un seul arrangement suivant un parallélipipède réduit, ou en admet plus d'un, il suffira par conséquent de connaître un seul arrangement du système, et le premier cas aura toujours lieu (et n'aura jamais lieu autrement), lorsque le parallélipipède réduit, donné par cet arrangement, est de telle nature, que toutes les lignes qui ne sont pas surpassées par d'autres surpassent réellement celles-ci, c'est-à-dire lorsque toutes les diagonales des faces sont plus grandes que les côtés de ces faces, et que de même toutes les diagonales du parallélipipède sont plus grandes que les arêtes de ce solide.

§ VI.

En appliquant maintenant aux formes ternaires les résultats du paragraphe précédent, nous supposerons, pour l'uniformité et pour éviter des distinctions inutiles, qu'on a donné à chaque forme ternaire

$$(1) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy,$$

par une permutation ou par un changement de signe des éléments indéterminés tels, que la forme ne cesse pas d'appartenir à la même classe, une expression telle, que l'on ait, en premier lieu, $a \leqq b \leqq c$; en second lieu, qu'aucun des coefficients a', b', c', s'ils ne sont pas tous les trois différents de zéro et négatifs, n'ait le signe négatif, et qu'enfin, en troisième lieu, quand on a $b = c$, alors c', abstraction faite du

signe, ne soit pas plus grand que b' ; que quand $a = b$, b' ne soit pas plus grand que a'; et enfin quand $a = b = c$, c' ne soit pas plus grand que b', ni b' plus grand que a'. Comme il est facile de le voir, on ne peut jamais satisfaire à ces conditions que d'une seule manière, et leur introduction procure l'avantage que, comme à chaque forme ternaire répond déjà, sans ces conditions, un parallélipipède entièrement déterminé, maintenant aussi à chaque parallélipipède répond une expression analytique dont les coefficients sont aussi entièrement déterminés quant à leur succession et à leurs signes. Cela posé, nous appellerons la forme (1), dans laquelle on a, par conséquent, $a \leqq b \leqq c$, une forme réduite, lorsqu'elle correspond à un parallélipipède réduit. Comme les diagonales des faces ne doivent pas être plus petites que les côtés, on a

$$a \pm 2c' + b \geqq b, \quad a \pm 2b' + c \geqq c, \quad b \pm 2a' + c \geqq c.$$

Si l'on pose $\sigma = -1$, lorsque a', b', c' sont tous les trois négatifs, et $\sigma = 1$ dans les autres cas, alors ces conditions sont équivalentes à

$$(2) \qquad a \geqq 2c'\sigma, \quad a \geqq 2b'\sigma, \quad b \geqq 2a'\sigma;$$

et dans le cas seulement où le signe d'égalité a lieu, l'une des diagonales sera égale à l'un des côtés dans le parallélogramme correspondant. Les conditions relatives aux diagonales du parallélipipède donnent

$$a + b + c + 2a'\varepsilon + 2b'\delta + 2c'\delta\varepsilon \geqq c,$$

les signes de $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$ étant arbitraires. Si l'on examine d'abord le cas où aucun des coefficients a', b', c' n'est négatif, et que l'on prenne en considération les quatre combinaisons de signes, et la circonstance que, quand $a = b$, on a

$$b' \leqq a',$$

on voit de suite que notre inégalité est toujours satisfaite d'elle-même en vertu des conditions déjà obtenues, et que le cas limite du signe d'égalité où la diagonale devient égale à l'arête $\sqrt{c}$, ne peut se présenter qu'une fois, et seulement quand l'une des grandeurs b', c' est

zéro, et qu'en même temps la condition (2) qui correspond à l'autre, et celle qui correspond à a', présentent aussi le cas limite de l'égalité. Si a', b', c' sont négatifs, notre inégalité est toujours satisfaite, et l'est de telle sorte, que le cas limite ne peut pas avoir lieu, si ce n'est quand $\delta = \varepsilon = 1$, de manière qu'il faut établir la nouvelle condition

$$(3) \qquad a + b + 2a' + 2b' + 2c' \geqq 0,$$

où le signe inférieur se rapporte de nouveau au cas où une diagonale devient égale à l'arête $\sqrt{c}$.

Lorsque les conditions (2) que nous venons de développer, et de plus la condition (3) lorsque a', b', c' sont négatifs, sont remplies de telle façon, que dans aucune des inégalités le cas limite de l'égalité ne se rencontre, il n'existera, dans la classe à laquelle appartient la forme, aucune autre forme différente de celle-ci avec ou sans signe d'égalité dans les conditions de définition, puisque, d'après ce que nous avons fait remarquer à la fin du paragraphe précédent, le système de points correspondant ne peut se partager que suivant un seul parallélipipède réduit. Il en est autrement lorsque les signes supérieurs ne se rencontrent pas dans toutes les conditions; il peut alors se trouver dans la même classe plusieurs formes réduites susceptibles de se déduire d'une forme donnée. Il suffira de montrer cette assertion pour un cas principal. Nous choisirons, à cet effet, le cas où $b < c$.

Si l'on suppose d'abord $a > 2c'\sigma$, on ne pourra changer que la direction de l'arête $\sqrt{c}$, et cela dans le cas où il se trouve encore dans le plan de la base supérieure un ou plusieurs points dont la distance au sommet est $\sqrt{c}$. Soient ξ, η, 1 les valeurs des éléments correspondantes à un tel point; alors, si la troisième arête est dirigée vers ce point, tous les coefficients, excepté a', b', resteront invariables, et a', b' se changeront respectivement en

$$a' + c'\xi + b\eta, \quad b' + a\xi + c'\eta,$$

comme il est facile de s'en assurer presque sans calcul. Mais, d'après l'énumération faite précédemment, les valeurs de ξ, η qui remplissent la condition sont

$$\xi = -\sigma, \quad \eta = 0,$$

lorsqu'on a

$$a = 2b'\sigma.$$

Lorsque

$$b = 2a'\sigma,$$

on a

$$\xi = 0, \quad \eta = -\sigma.$$

Lorsqu'on a simultanément

$$a = 2b', \quad b = 2a', \quad c' = 0,$$

alors

$$\xi = -1, \quad \eta = -1,$$

et lorsqu'enfin a', b', c' sont négatifs et qu'ils remplissent la condition

$$a + b + 2a' + 2b' + 2c' = 0,$$

il faut poser

$$\xi = 1 \quad \text{et} \quad \eta = 1.$$

Dans ces quatre suppositions, il faut donc changer respectivement

$$\begin{array}{rcl} a',\ b' & \text{en} & a' - c'\sigma,\ b' - a'\sigma,\ (= -b'); \\ -a' & \text{en} & b' - c'\sigma; \\ -a' & \text{en} & -b'; \\ a' + b + c' & \text{en} & a + b' + c'. \end{array}$$

On peut faire abstraction du troisième cas, et en général de la supposition $c' = 0$, puisqu'à cette supposition correspond une nouvelle forme qui, après qu'on y a opéré les changements de signes prescrits au commencement du présent paragraphe, devient évidemment identique avec la forme d'où l'on est parti. Dans chacune des trois autres suppositions on obtient, après avoir fait les changements de signes nécessaires, une nouvelle forme réduite appartenant à la même classe (si elle ne coïncide pas avec la forme originaire), et l'on obtient deux formes pareilles lorsque deux de nos suppositions sont réalisées en même temps. Ici se termine l'énumération des formes, puisque évidemment la simultanéité des trois suppositions ne saurait avoir lieu. Si (toujours dans la sup-

position de $b < c$), on avait eu $a = 2c'\sigma$, il aurait fallu, dans le cas de $a < b$, faire tourner la deuxième arête dans le plan de la base; pour $a = b$, il eût fallu faire aussi prendre à la première arête la position primitive de la seconde, et comparer cette nouvelle ou ces deux nouvelles positions des deux premières arêtes avec toutes les directions de la troisième, sans excepter la direction primitive.

On peut facilement remédier à l'inconvénient résultant de ce que plusieurs formes réduites peuvent, dans des cas singuliers, se trouver dans la même classe et écarter ces exceptions, en admettant, pour ces cas singuliers, dans la définition générale certaines conditions secondaires que l'on découvre sans peine, en exigeant, par exemple, que le dernier coefficient c', dans le cas où il n'est pas entièrement déterminé, reçoive la valeur numérique la plus petite dont il soit susceptible dans les formes réduites de cette classe, et en agissant ensuite de la même manière par rapport à b'. Pour en donner un exemple, nous examinerons parmi les cas singuliers traités précédemment, celui où, en supposant $b = c$, aucune des trois conditions (2) n'a lieu avec le signe inférieur, et où, par contre, les trois valeurs négatives a', b', c' satisfont à l'équation

$$a + b + 2a' + 2b' + 2c' = 0.$$

D'après la remarque précédente, c' est déterminé, et il n'existe pour ce cas que deux formes réduites. Si a' et b' sont les valeurs du quatrième et du cinquième coefficient dans l'une de ces formes, elles seront dans l'autre $a' + b + c'$, $a + b' + c'$, ou plutôt, comme ces dernières valeurs sont évidemment positives, mais que c' est négatif, et que par conséquent, pour avoir des signes satisfaisant aux règles prescrites, il faut changer z en $-z$, elles seront $-(a' + b + c')$, $-(a + b' + c')$; et ces valeurs, comme le veut la nature de la question, étant substituées à la place de a', b', satisfont à leur tour à l'équation

$$a + b + 2a' + 2b' + 2c' = 0;$$

ensuite les valeurs a', b' se déduisent des valeurs en question, de la même manière que celles-ci se déduisent elles-mêmes de a', b'. Comme d'après cela le cinquième coefficient n'admet que les deux valeurs négatives b' et $-(a + b' + c')$, dont la somme $= -a - c'$, on voit que

si aux conditions de définition on ajoute encore la condition

$$-b' \leqq \frac{1}{2}(a + c'),$$

la classe ne contiendra qu'une seule forme réduite.

En terminant ce Mémoire, nous déduirons encore de nos principes une belle proposition, que Seeber a trouvée par induction, et que Gauss a démontrée dans la Note dont il a déjà été question plusieurs fois. D'après cette proposition, le produit des trois premiers coefficients, dans une forme réduite, n'est pas plus grand que deux fois la valeur absolue du déterminant.

Comme la valeur absolue du déterminant est égale au carré du volume du parallélipipède correspondant à la forme, nous avons donc, en conservant la notation dont nous nous sommes servi au § V, à prouver l'inégalité

$$abc \leqq 2\Delta h,$$

dans laquelle Δ représente le carré de l'aire de la base. Posons

$$c = b + t,$$

où par conséquent t n'est pas négatif; et de l'inégalité obtenue au § V,

$$h \geqq c - \rho = b - \rho + t,$$

après l'avoir multipliée par 2Δ, tirons l'équation

$$abc = ab^2 + abt;$$

nous aurons

$$2\Delta h - abc \geqq 2\Delta(b - \rho) - ab^2 + (2\Delta - ab)t.$$

Comme d'après l'inégalité démontrée à la fin du § IV, $2\Delta(b - \rho) - ab^2$ n'est pas négative, et que $2\Delta - ab \geqq \frac{1}{2}ab$ est positif, la vérité de la proposition se trouve établie.

SUR

LA POSSIBILITÉ DE LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN TROIS CARRÉS;

PAR M. G. LEJEUNE-DIRICHLET.

Journal de Crelle, t. XL, p. 228.

TRADUIT DE L'ALLEMAND PAR M. J. HOUEL.

La théorie de la décomposition des nombres entiers n qui ne sont pas de l'une des formes $4k$, $8k + 7$ en trois carrés sans diviseur commun, est l'une des plus compliquées de l'arithmétique transcendante, lorsqu'on veut développer cette théorie complétement, c'est-à-dire, non-seulement démontrer la possibilité de la décomposition, mais encore déterminer en même temps le nombre de toutes les décompositions possibles, nombre qui peut être exprimé, soit, comme Gauss l'a fait voir le premier [*], au moyen du nombre des formes binaires de déterminant $-n$, soit encore indépendamment de ce nombre [**]. Il y a cependant des cas où il suffit de supposer la possibilité de la décomposition, comme cela a lieu, par exemple, dans la démonstration donnée par Cauchy [***] et simplifiée depuis par Legendre, pour le théorème de Fermat relatif aux nombres polygonaux, démonstration qui s'appuie seulement sur ce que tout nombre, à l'exception de ceux qui ont été précédemment exclus, est la somme de trois carrés. Il semble donc qu'une démonstration simple de la possibilité de la décomposition n'est pas tout à fait dépourvue d'intérêt. Nous allons en exposer une dans la présente Note.

[*] *Disq. Arith.*, art. 229.

[**] *Journal de Crelle*, t. XXI, p. 155.

[***] *Exercices mathématiques*, par Cauchy, 2e année, p. 265.

On a besoin d'abord, pour cela, de cette proposition connue, que toute forme ternaire positive de déterminant -1, c'est-à-dire toute expression telle que

$$(1) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy,$$

dont les coefficients sont des nombres entiers satisfaisant à l'équation

$$(2) \qquad aa'^2 + bb'^2 + cc'^2 - abc - 2a'b'c' = -1,$$

et soumis en outre aux conditions que

$$a, \quad b, \quad c, \quad bc - a'^2, \quad ac - b'^2, \quad ab - c'^2$$

soient positifs (conditions dont la première et la quatrième entraînent d'ailleurs les quatre autres), est équivalente à la forme

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2.$$

Il suffit, pour démontrer cette proposition, de se convaincre que, pour le déterminant -1, l'expression (3) est la seule forme réduite positive. Si la forme (1) est une forme réduite, alors, en vertu de la proposition démontrée à la fin du précédent Mémoire, abc ne doit pas être plus grand que 2; d'où, si l'on suppose

$$a \leqq b \leqq c,$$

il résulte immédiatement

$$a = b = 1.$$

Mais comme d'ailleurs, par la définition des formes réduites, $2c'$ et $2b'$, abstraction faite du signe, ne doivent pas être plus grands que a, ni $2a'$ plus grand que b, il vient

$$a' = b' = c' = 0$$

et, par suite, en vertu de l'équation (2),

$$c = 1.$$

Cela posé, la possibilité de la décomposition du nombre positif a sera établie, dès qu'on aura trouvé une forme ternaire positive (1) de déterminant -1 dont le premier coefficient soit a. En effet, une telle

forme étant équivalente à la forme (3), celle-ci peut être transformée dans la première, et il vient

$$a = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2,$$

α, α', α'' étant trois des neuf coefficients de la substitution et ne pouvant avoir aucun diviseur commun, parce que chaque terme du déterminant formé avec ces neuf coefficients contient en facteur soit α, soit α', soit α'', et que ce déterminant est égal à l'unité.

Tout revient donc, en considérant a comme donné, à satisfaire à l'équation (2) au moyen de cinq nombres entiers b, c, a', b', c', qui doivent en outre être assujettis à la condition que $bc - a'^2$ soit positif. En prenant

$$b' = 1, \quad c' = 0,$$

l'équation devient

$$b = a\Delta - 1,$$

où l'on a posé

$$\Delta = bc - a'^2,$$

et il ne reste plus qu'à faire voir que l'on peut choisir le nombre positif Δ de telle sorte que $-\Delta$ soit un résidu quadratique de $b = a\Delta - 1$, puisque, dans cette hypothèse, on peut toujours déterminer c et a' de telle façon, que l'on ait

$$a'^2 - bc = -\Delta.$$

Nous allons maintenant faire voir que la condition dont nous parlons peut toujours être satisfaite au moyen d'une valeur impaire de Δ, et que pour cette valeur, si a est de la forme $4k + 2$, $b = a\Delta - 1$ devient égal à un nombre premier impair p, tandis que si a est impair sans être de la forme $8k + 7$, b est égal au double d'un pareil nombre premier p. En commençant par le second cas, nous avons l'équation

$$2p = a\Delta - 1,$$

où nous ne supposerons pas encore tout d'abord que p soit un nombre premier, mais seulement un nombre impair. En posant

$$\Delta = 8t + \varepsilon,$$

ε étant égal à l'un des nombres 1, 3, 5, 7, on voit immédiatement que, dans chacun des quatre cas que peut présenter a relativement au diviseur 8, Δ admet deux formes relativement au même diviseur, ou bien ε admet deux valeurs, lorsque p doit être impair, comme nous le supposons. Pour chacun des huit cas qui se présentent ainsi, appliquons la loi de réciprocité au premier membre de l'équation

$$\left(\frac{p}{\Delta}\right) = \left(\frac{-2}{\Delta}\right),$$

laquelle résulte de $2p = a\Delta - 1$, et où la notation de Legendre est employée avec la signification plus étendue introduite par Jacobi : remplaçons $\left(\frac{-2}{\Delta}\right)$ par sa valeur connue et multiplions ensuite par

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \pm 1,$$

où l'on connaîtra aussi le signe de ± 1, d'après la forme linéaire que p aura dans chaque cas particulier. On obtient ainsi les résultats suivants :

$$a = 8k+1, \quad \begin{cases} \Delta = 8t+3, & p = 4s+1, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = +1, \\ \Delta = 8t+7, & p = 4s+3, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = -1, \end{cases}$$

$$a = 8k+3, \quad \begin{cases} \Delta = 8t+1, & p = 4s+1, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = +1, \\ \Delta = 8t+5, & p = 4s+3, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = +1, \end{cases}$$

$$a = 8k+5, \quad \begin{cases} \Delta = 8t+3, & p = 4s+3, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = +1, \\ \Delta = 8t+7, & p = 4s+1, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = -1, \end{cases}$$

$$a = 8k+7, \quad \begin{cases} \Delta = 8t+1, & p = 4s+3, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = -1, \\ \Delta = 8t+5, & p = 4s+1, & \left(\frac{-\Delta}{p}\right) = -1. \end{cases}$$

On voit que si l'on n'a pas $a \doteq 8k+7$, la condition $\left(\frac{-\Delta}{p}\right) = 1$ peut

toujours être satisfaite. Mais aussi dans chacun des huit cas p peut être un nombre premier, comme cela ressort de l'expression

$$p = \frac{1}{2}(a\Delta - 1) = 4at + \frac{1}{2}(a\varepsilon - 1),$$

dans laquelle $\frac{1}{2}(a\varepsilon - 1)$, d'après le choix de ε, est impair et, de plus, sans diviseur commun avec a. Cette expression est donc le terme général d'une progression arithmétique qui contient nécessairement des nombres premiers. Si l'on a maintenant un nombre premier p pour lequel $\left(\frac{-\Delta}{p}\right)$ soit $= 1$, alors $-\Delta$ est résidu quadratique de p et par suite aussi de $2p$. C. Q. F. D.

Dans le cas de a pair, nous poserons de suite

$$a = 4k + 2,$$

parce que l'on sait d'avance que, pour $a = 4k$, la condition ne peut être remplie. Puisque, dans l'équation

$$p = a\Delta - 1.$$

nous supposons Δ impair, p est donc de la forme $4s + 1$, et l'on a

$$\left(\frac{-1}{\Delta}\right) = \left(\frac{p}{\Delta}\right) = \left(\frac{\Delta}{p}\right) = \left(\frac{-\Delta}{p}\right).$$

Il faut donc donner à Δ la forme $4t + 1$ pour que $\left(\frac{-\Delta}{p}\right)$ devienne $= 1$. On obtient ainsi

$$p = 4at + a - 1,$$

expression qui peut encore être un nombre premier, auquel cas $-\Delta$ est résidu quadratique de p.

L'application du procédé que l'on vient de développer n'est pas restreinte au cas du déterminant -1, et nous allons encore en donner un second exemple pour le déterminant -3.

En cherchant encore, comme précédemment, les formes réduites appartenant à ce déterminant, la condition

$$abc \leqq 6,$$

dans l'hypothèse de $a \leqq b \leqq c$, donne pour a la valeur 1, tandis que b peut être $= 1$ ou $= 2$. Maintenant $2c'$ et $2b'$ ne pouvant être numériquement plus grands que $a = 1$, il s'ensuit que

$$b' = c' = 0,$$

et l'équation d'où l'on doit tirer le déterminant se réduit à

$$a'^2 - bc = -3.$$

Or $2a'$ ne pouvant être non plus $> b$ numériquement, on a donc, pour $b = 1$, $a' = 0$, et par suite $c = 3$. Si au contraire $b = 2$, on a alors

$$2a' = 0 \quad \text{ou} \quad 2a' = \pm 2.$$

La première de ces valeurs ne satisfait pas à l'équation précédente dans laquelle $bc \geqq 4$. Il ne reste donc qu'à supposer

$$a' = \pm 1,$$

d'où résulte $c = 2$. En négligeant le signe inférieur, ce qui revient à un simple changement de signe de z, on obtient les deux formes réduites

$$(4) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + 3z^2, \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz, \end{cases}$$

de sorte que toute forme ternaire positive (1) de déterminant -3, c'est-à-dire dont les coefficients satisfont à l'équation

$$(5) \qquad aa'^2 + bb'^2 + cc'^2 - abc - 2a'b'c' = -3,$$

sera équivalente à l'une des formes (4). En cherchant maintenant les résidus que donnent les expressions (4) par rapport au diviseur 8, lorsque dans ces expressions on donne aux éléments x, y, z toutes les combinaisons de valeurs paires et impaires, à l'exclusion du seul cas de trois valeurs paires simultanées (puisque nous supposons toujours les éléments sans diviseur commun), on trouve que la première des formes (4) donne tous les résidus possibles relativement au module 8, tandis que la seconde expression n'admet pour aucune combinaison ni l'une ni l'autre des formes $8k + 5$, $4k$. Si l'on consi-

dere en outre que deux formes équivalentes représentent toujours les mêmes nombres, on en pourra conclure immédiatement que si une forme de déterminant -3 représente un nombre $8k+5$ ou $4k$ (ce qui arrive toujours lorsque l'un de ses trois premiers coefficients, b par exemple, est un nombre de cette espèce), cette forme n'est pas équivalente à la seconde des formes (4), et qu'elle l'est par conséquent à la première.

Pour démontrer maintenant que le nombre donné a peut être représenté par la première des formes (4), en procédant alors comme ci-dessus et posant derechef dans l'équation (5)

$$b' = 1, \quad c' = 0, \quad \Delta = bc - a'^2,$$

il ne reste plus qu'à établir que le nombre positif Δ peut être déterminé de telle sorte, que $b = a\Delta - 3$ prenne la forme $8k+5$ ou $4k$, et que $-\Delta$ soit en même temps résidu quadratique de b. Nous nous restreindrons ici aux nombres a qui n'ont avec le déterminant aucun facteur commun, c'est-à-dire qui ne sont pas divisibles par 3. Si l'on pose

$$\Delta = 8\Delta',$$

Δ' devant être impair et non divisible par 3, alors b sera premier avec Δ' et de la forme $8k+5$, et nous n'aurons plus qu'à remplir l'autre condition. De l'équation

$$b = 8a\Delta' - 3,$$

résulte immédiatement

$$\left(\frac{b}{\Delta'}\right) = \left(\frac{-3}{\Delta'}\right),$$

ou, en remarquant que

$$b \equiv 1 \quad (\text{mod. } \Delta),$$

et appliquant les propositions connues,

$$\left(\frac{b}{\Delta'}\right) = \left(\frac{\Delta'}{b}\right) = \left(\frac{-\Delta'}{b}\right) = \left(\frac{-3}{\Delta'}\right).$$

En multipliant par

$$\left(\frac{8}{b}\right) = \left(\frac{2}{b}\right) = -1,$$

on en tire

$$\left(\frac{-\Delta}{b}\right) = -\left(\frac{-3}{\Delta'}\right),$$

et l'on voit que la condition

$$\left(\frac{-\Delta}{b}\right) = 1$$

est satisfaite lorsque l'on fait

$$\Delta' = 6t - 1$$

et, par suite,

$$b = 48at - 8a - 3.$$

Or comme évidemment cette dernière expression peut devenir égale à un nombre premier, il est donc démontré que tout nombre non divisible par 3 peut être représenté par la forme

$$x^2 + y^2 + 3z^2,$$

de telle sorte que x, y, z n'aient aucun diviseur commun. Des considérations analogues peuvent s'appliquer aux nombres divisibles par 3, la possibilité de leur représentation étant soumise à une condition facile à apercevoir; elles peuvent également s'appliquer aux nombres qui peuvent être représentés par la seconde des formes (4).

NOTE

SUR

UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE SURFACES A AIRE MINIMA;

Par M. Ernest LAMARLE.

1. On sait que les surfaces qui satisfont à la condition de circonscrire un volume donné *sous une aire minima*, remplissent en même temps d'autres conditions très-remarquables. Déterminées géométriquement par *la constance de leur courbure moyenne*, elles représentent, au point de vue physique, les formes extérieures qu'affecte une masse liquide où l'équilibre subsiste sous la seule influence des attractions moléculaires.

Cette propriété des surfaces à aire *minima* se rattache à la théorie capillaire. Elle offre, à cet égard, des moyens précieux d'investigation, et elle acquiert une importance toute nouvelle depuis que les formes d'équilibre d'une masse liquide, supposée libre entre certaines limites, ont été rendues réalisables par une ing énieuse invention due à M. Plateau.

En présence des moyens nouveaux mis à la disposition du physicien pour étudier les principaux phénomènes de l'attraction moléculaire, il y a un véritable intérêt à augmenter le nombre des données théoriques susceptibles d'être vérifiées par voie d'expérience. Tel est, en partie, l'objet que nous nous proposons dans la présente Note.

Déjà plusieurs géomètres ont traité la question qui nous occupe ici. Monge a, le premier, donné l'intégrale générale des surfaces dont la courbure moyenne est partout égale à zéro Au point de vue des applications, cette première solution, toute compliquée d'imaginaires, laissait beaucoup à désirer. MM. Ossian Bonnet et Catalan ont donné d'autres solutions simples et satisfaisantes. En dehors de ce cas particulier, aujourd'hui résolu, le cas général des surfaces à courbure moyenne constante a été l'objet de travaux distincts accomplis par d'autres géomètres, au nombre desquels nous citerons M. Delaunay, Beer, etc. Ces derniers travaux ont fait connaître quelles sont, parmi les surfaces de révolution, celles qui pour un même volume circon-

scrit, ont une aire *minima*. Nous poursuivons ces recherches en les appliquant au cas d'une surface engendrée par le déplacement d'une ligne qui tourne autour d'un axe, en même temps qu'elle se déplace parallèlement à cet axe. Nous admettons d'ailleurs que les angles décrits par rotation sont et restent proportionnels aux longueurs franchies par translation.

On observera que le problème ainsi énoncé comprend, comme cas particuliers, les surfaces de révolution, et de plus, parmi les surfaces réglées qui ne sont point de révolution, l'hélicoïde gauche à plan directeur. Il embrasse ainsi toutes les solutions possibles, en ce qui concerne les surfaces réglées et les surfaces de révolution. Il comprend, en outre, une autre solution déjà connue et plusieurs solutions nouvelles.

2. Prenons un système d'axes coordonnés rectangulaires et représentons par

$$x = \varphi(y)$$

l'équation d'une ligne quelconque tracée dans le plan des x, y.

Par hypothèse, cette ligne tourne autour de l'axe des x en même temps qu'elle glisse parallèlement à cet axe. Soit l la longueur franchie par translation pendant une révolution complète : on a

$$\frac{l}{2\pi} = \text{const.} = \mu,$$

et l'on trouve aisément pour équation de la surface engendrée

$$(1) \qquad x = \mu \operatorname{arc\,tang} \frac{z}{y} + \varphi(z^2 + y^2).$$

Cela posé, le problème qu'il s'agit de résoudre consiste à déterminer, parmi les surfaces que l'équation (1) représente, celles qui satisfont à la condition d'avoir *une courbure moyenne constante*, ou, ce qui revient au même, de *circonscrire un volume donné sous une aire minima*.

Si d'abord nous nous plaçons au premier point de vue et que nous désignions par ρ et ρ' les deux rayons de courbure principaux en un point quelconque de l'une des surfaces cherchées, nous aurons pour équation du problème

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \text{const.} = \frac{2}{r},$$

r étant le rayon qui mesure la courbure moyenne.

La condition exprimée par l'équation (2) a pour traduction générale

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]\frac{d^2x}{dz^2} - 2\frac{dx}{dz}\cdot\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^2x}{dz\,dy} + \left[1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\right]\frac{d^2x}{dy^2} \\ &\qquad = \frac{2}{r}\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Transportons dans l'équation (3) les valeurs des coefficients différentiels qu'elle renferme, en les déduisant de l'équation (1), et posant $z = 0$ dans les résultats obtenus. Nous avons ainsi pour équation différentielle de la ligne méridienne cherchée

$$(4)\quad \frac{[1+\varphi'(y)^2]\varphi'(y)}{y} + 2\frac{\mu^2}{y^3}\varphi'(y) + \left(1+\frac{\mu^2}{y^2}\right)\varphi''y = \frac{2}{r}\left[1+\varphi'(y)^2+\frac{\mu^2}{y^2}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Si d'ailleurs on prend x pour variable indépendante et qu'on pose

$$\frac{dy}{dx} = p,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = q,$$

il vient

$$\varphi'(y) = \frac{1}{p},\quad \varphi''(y) = -\frac{q}{p^3},$$

ce qui donne, au lieu de l'équation (4),

$$\frac{p^2+1}{y} + \frac{2\mu^2p^2}{y^3} - q\left(1+\frac{\mu^2}{y^2}\right) = \frac{2}{r}\left(1+p^2+\frac{\mu^2p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ou bien encore

$$\frac{dy}{\sqrt{1+p^2+\mu^2\dfrac{p^2}{y^2}}} - \frac{pdy\left(y+\dfrac{\mu^2}{y}\right) - \dfrac{p^2\mu^2}{y^2}\,dy}{\left(1+p^2+\mu^2\dfrac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{r}ydy,$$

et, intégrant une première fois,

$$(5)\quad \frac{y}{\sqrt{1+p^2+\mu^2\dfrac{p^2}{y^2}}} = \frac{y^2}{r} + C.$$

3. Au lieu d'opérer comme nous venons de le faire, on peut déterminer la ligne méridienne par la condition qu'elle engendre pour un

volume donné une aire minima, ou pour une aire donnée le plus grand volume.

En supposant une révolution complète, les expressions du volume et de l'aire *engendrée* sont respectivement

$$\pi \int y^2 \, dx \quad \text{et} \quad 2\pi \int y dx \sqrt{1 + p^2 + \mu^2 \frac{p^2}{y^2}}.$$

On déduit de là, en égard à la condition qui doit être remplie,

$$\delta \int \left(y^2 + 2ay \sqrt{1 + p^2 + \mu^2 \frac{p^2}{y^2}} \right) dx = 0.$$

Or, en regardant comme fixes les deux extrémités de l'arc générateur, et ne faisant varier que x, on a d'abord

$$\delta p = -\frac{dy \, . \, \delta dx}{dx^2},$$

puis substituant dans la variation de l'intégrale

$$\int \left(y^2 + \frac{2ay}{\sqrt{1 + p^2 + \mu^2 \frac{p^2}{y^2}}} \right) d\delta x = 0.$$

Il vient donc, en intégrant par parties et observant qu'aux limites $\delta x = 0$,

$$\int \left[\delta x \, . \, d \left(y^2 + \frac{2ay}{\sqrt{1 + p^2 + \mu^2 \frac{p^2}{y^2}}} \right) \right] = 0.$$

De là résulte, comme précédemment,

$$y^2 + \frac{2ay}{\sqrt{1 + p^2 + \mu^2 \frac{p^2}{y^2}}} = \text{const.}$$

4. Reprenons l'équation (5), où nous savons, à priori, quel sens s'attache à la constante r. En y remplaçant p par $\frac{dy}{dx}$, on trouve, en général,

(6) $$dx = \frac{\sqrt{y^2 + \mu^2}}{y} \frac{y^2 + cr}{\sqrt{r^2 y^2 - (y^2 + cr)^2}} dy,$$

et, pour le cas particulier des surfaces de révolution, μ étant égal à zéro,

$$(7) \qquad dx = \frac{y^2 + cr}{\sqrt{r^2 y^2 - (y^2 + cr)^2}} dy.$$

Désignons les premières surfaces sous le nom d'*hélicoïdes*, et observons que leurs lignes méridiennes, exprimées par l'équation (6), dérivent très-simplement de celles qui correspondent aux surfaces de révolution et qui sont représentées par l'équation (7). Pour passer de celles-ci à celles-là, il suffit de considérer de part et d'autre les points qui ont même ordonnée et d'y réduire, dans le rapport de y à $\sqrt{y^2 + \mu^2}$, la tangente de l'angle que la touchante à la courbe fait avec l'axe des x.

On sait, d'après M. Delaunay, que les lignes méridiennes des surfaces de révolution, à *courbure moyenne constante*, sont les roulettes engendrées par le foyer d'une section conique qui roule sans glisser sur l'axe de révolution. Soient y l'ordonnée du point décrivant et ω la vitesse angulaire de roulement; si, *toutes choses restant d'ailleurs les mêmes*, on fait glisser la section conique avec la vitesse variable $\omega\left(\sqrt{y^2 + \mu^2} - y\right)$, les roulettes se modifient et deviennent les lignes méridiennes des *hélicoïdes à courbure moyenne constante*.

Lorsque la ligne méridienne est une droite parallèle ou perpendiculaire à l'axe de révolution, elle ne se modifie point, dans le passage des surfaces de révolution aux hélicoïdes correspondants. Le cas du parallélisme donne le cylindre droit à base circulaire pour les deux genres de surfaces. Le cas de la perpendicularité donne, d'une part le plan, de l'autre l'hélicoïde gauche à plan directeur, et il est ainsi démontré que, dans cet hélicoïde, la courbure moyenne est constamment nulle.

5. Signalons un résultat curieux, fourni par l'induction, et d'ailleurs très-facile à établir rigoureusement.

Soient, *en général*, A, A′ deux surfaces dont l'une est un hélicoïde, l'autre une surface de révolution.

Soient s, s' leurs lignes méridiennes respectives et x, x' les abscisses qui correspondent de part et d'autre à deux points m, m' équidistants de l'axe de révolution.

μ étant le rapport de la vitesse de translation à la vitesse angulaire

dans la génération de la surface A, on suppose qu'il existe entre les lignes méridiennes s, s' la relation générale

$$dx' = \frac{y}{\sqrt{y^2 + \mu^2}} dx.$$

Cela posé, on a le théorème suivant :

m, m' étant deux points équidistants de l'axe, et pris, l'un sur la surface A, *l'autre sur la surface* A', *il y a même courbure moyenne en chacun de ces points.*

Ce théorème comporte, ainsi qu'on le voit aisément, une infinité d'applications particulières. Nous nous bornerons à en donner une.

Supposons la ligne s droite et inclinée sur l'axe de révolution.

La surface A est un hélicoïde gauche ; la surface A' un hyperboloïde de révolution à deux nappes.

Soit p la tangente de l'inclinaison de la droite s sur l'axe ; la ligne s' a pour équation

$$px' + c = \sqrt{\mu^2 + y^2}.$$

On voit ainsi comment se correspondent l'hélicoïde gauche et l'hyperboloïde de révolution, ces deux surfaces ayant même courbure moyenne en leurs points conjugués, c'est-à-dire en deux points quelconques pris, de part et d'autre, à égale distance de l'axe des x.

Discussion de l'équation (6).

6. Reprenons l'équation (6) et supposons d'abord que la courbure moyenne, assujettie à demeurer constante, soit égale à zéro. Il vient alors

$$dx = \pm c \sqrt{\frac{\mu^2 + y^2}{y^2 - c^2}} \cdot \frac{dy}{y},$$

et désignant par c' la constante introduite par la seconde intégration,

$$x = c' \pm c \log\left(\sqrt{y^2 + \mu^2} - \sqrt{y^2 - c^2}\right) \pm \mu \operatorname{arc\,tang} \frac{\mu c}{y^2 - \sqrt{(y^2 + \mu^2)(y^2 - c^2)}}.$$

L'hypothèse $c = 0$ donne pour ligne méridienne

$$x = c',$$

et pour surface correspondante, l'hélicoïde gauche à plan directeur.

En général, la ligne méridienne est une courbe située tout entiere au-dessus de l'axe des x et dont le point le plus bas répond à l'ordonnée $y = c$. Si l'on détermine la constante c' de manière que l'axe des y passe par ce point, on a

$$x = \mu \operatorname{arc\,tang} \frac{\mu}{c} \sqrt{\frac{y^2 - c^2}{y^2 + \mu^2}} - c \log \frac{\sqrt{y^2 + \mu^2} - \sqrt{y^2 - c^2}}{\sqrt{\mu^2 + c^2}} \text{ [*]}.$$

ou posant

$$z = \mu \operatorname{arc\,tang} \frac{\mu}{c} \sqrt{\frac{y^2 - c^2}{y^2 + \mu^2}},$$

et substituant

$$\sqrt{y^2 + \mu^2} = \frac{\sqrt{\mu^2 + c^2}}{2} \left(e^{\frac{x+z}{c}} + e^{-\frac{x+z}{c}} \right).$$

Soit $\mu = 0$. La surface engendrée étant alors de révolution, il vient pour ligne méridienne

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right),$$

c'est-à-dire la chaînette.

7. Dans le cas général, la courbure moyenne n'étant pas nulle, on a

$$dx = \frac{\sqrt{y^2 + \mu^2}}{y} \frac{y^2 + cr}{\sqrt{r^2 y^2 - (y^2 + cr)^2}} dy.$$

Posons

$$y^2 + \mu^2 = z^2,$$

il vient

$$dx = \frac{z^2 (z^2 - \mu^2 + cr)\, dz}{(z^2 - \mu^2) \sqrt{\left[z^2 + cr - \mu^2 + \frac{r}{2} \sqrt{r^2 - 4cr} \right] \left[\frac{r}{2} \sqrt{r^2 - 4cr} + \frac{r^2}{2} - cr + \mu^2 - z^2 \right]}}.$$

---

[*] MM. Ossian Bonnet et Catalan ont donné cette solution comme cas particulier des surfaces où la courbure moyenne est égale à zéro. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1853, volume XXVII, p. 531, et volume XL, p. 275.)

Soit fait maintenant

$$z^2 = \mu^2 + \frac{r^2 - 2cr}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{r^2 - 4cr} - r\sqrt{r^2 - 4cr}\,.\sin^2\varphi.$$

Le radical qui figure au dénominateur de la valeur de dx se réduit à

$$r\sqrt{r^2 - 4cr}\,.\sin\varphi\,.\cos\varphi.$$

On a d'ailleurs

$$dz = -\frac{r\sqrt{r^2 - 4cr}\,.\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\mu^2 + \frac{r^2 - 2cr}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{r^2 - 4cr} - r\sqrt{r^2 - 4cr}\,.\sin^2\varphi}}\,d\varphi.$$

Posons, pour simplifier,

$$P^2 = \mu^2 + \frac{r^2 - 2cr}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{r^2 - 4cr} = \mu^2 + \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4cr}\right)^2$$

et

$$K^2 = r\frac{r\sqrt{r^2 - 4cr}}{P^2}.$$

De là résulte, en substituant,

$$(8)\quad \begin{cases} dx = P\,d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + \dfrac{cr.d\varphi}{P\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \\ \qquad + \dfrac{\mu^2 c.r.d\varphi}{P(P^2 - \mu^2 - P^2k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}. \end{cases}$$

La solution générale se trouve ainsi ramenée aux intégrales elliptiques, et l'on peut la considérer comme complète, au point de vue analytique.

Application particulière.

8. Considérons en particulier le cas où $c = 0$, c'est-à-dire le cas où il s'agit de l'hélicoïde qui dérive de la sphère et qui lui correspond.

L'équation (8) se réduit à la forme très-simple

$$(9)\quad dx = \sqrt{\mu^2 + r^2}\,.\,d\varphi\sqrt{1 - \frac{r^2}{\mu^2 + r^2}\sin^2\varphi},$$

et l'on a en même temps

$$(10) \qquad y = r \cos \varphi.$$

Désignons par s l'arc de l'ellipse dont les axes principaux sont respectivement $2a$ et $2b$: on a d'abord pour équation de cette ellipse

$$(11) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Posons

$$x = a \sin \varphi;$$

il en résulte

$$y = b \cos \varphi,$$

et ensuite

$$ds = a d\varphi \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin \varphi^2}.$$

En attribuant aux quantités a, b les valeurs suivantes :

$$a = \frac{r}{\mu} \sqrt{\mu^2 + r^2}, \quad b = r,$$

on en déduit pour la différentielle de l'arc elliptique,

$$ds = \frac{r}{\mu} \sqrt{\mu^2 + r^2} \,.\, d\varphi \sqrt{1 - \frac{r^2}{\mu^2 + r^2} \sin^2 \varphi},$$

et l'on voit aisément comment la courbe méridienne, représentée par les équations (9) et (10), dérive de l'ellipse représentée par l'équation (11).

Soient m, m' deux points quelconques ayant même ordonnée $y = r \cos \varphi$, l'un placé sur l'ellipse, l'autre sur la méridienne cherchée : s étant la longueur de l'arc mesuré sur l'ellipse entre le sommet du petit axe et le point m, $\frac{\mu}{r} s$ est l'abscisse qui correspond au point m' de la courbe méridienne.

S'agit-il ensuite de la section faite dans l'hélicoïde par un plan perpendiculaire à l'axe de révolution et désignée sous le nom de *parallèle*? Le méridien tournant en même temps qu'il glisse, il est visible que, si l'on prend pour pôle le point où le parallèle est percé par l'axe

de révolution, les ordonnées du méridien deviennent les rayons vecteurs du parallèle. On voit d'ailleurs que, pour une translation représentée par l'abscisse x du méridien, l'angle décrit par l'ordonnée correspondante est mesuré par l'arc $\frac{x}{\mu}$ du cercle au rayon 1, ou, ce qui revient au même, par l'arc $\frac{rx}{\mu}$ du cercle au rayon r.

Il suit de là que, pour construire le parallèle de l'hélicoïde cherché, on peut opérer de la manière suivante :

1°. Tracer avec le rayon r une circonférence de cercle;

2°. Appliquer sur cette circonférence, à partir d'un même point, les arcs s de l'ellipse (11);

3°. Prendre, dans cette ellipse, les ordonnées qui correspondent aux extrémités des arcs s;

4°. Reporter ces ordonnées sur les rayons vecteurs menés du centre aux extrémités des arcs s devenus circulaires.

9. Procédant comme il vient d'être dit et prenant le centimètre pour unité de longueur, nous avons attribué à μ et r les valeurs suivantes :

$$r = 5,$$

$$\mu = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

De là résulte immédiatement

$$\frac{r^2}{\mu^2 + r^2} = \frac{3}{4},$$

et par suite

$$y = 5 \cos\varphi,$$

$$s = 10 \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\varphi}.$$

Cela posé, nous avons calculé les valeurs qui figurent dans le tableau ci-après, et que l'on peut d'ailleurs déterminer graphiquement.

VALEURS CORRESPONDANTES ET SIMULTANÉES		
DES ANGLES φ.	DES ARCS D'ELLIPSE s.	DES ORDONNÉES y.
degrés.	centimetres.	centimètres
0	0	5,000
1	0,1745	4,999
2	0,35	4,997
3	0,52	4,993
4	0,70	4,998
5	0,87	4,981
10	1,74	4,92
15	2,59	4,83
20	3,44	4,698
25	4,26	4,53
30	5,06	4,33
35	5,83	4,095
40	6,57	3,83
45	7,28	3,535
50	7,95	3,214
55	8,59	2,868
60	9,18	2,50
65	9,74	2,11
70	10,27	1,71
75	10,76	1,20
80	11,22	0,86
85	11,67	0,43
90	12,1105	0,00

La partie de la courbe méridienne représentée *fig.* 1 (p. 252) [*] a pour abscisses les longueurs de l'arc s réduites dans le rapport de μ à r, c'est-à-dire de 1 à $\sqrt{3}$. Les ordonnées correspondantes sont celles qui figurent en regard de ces arcs dans la dernière colonne du tableau précédent.

La partie du parallèle qui correspond à une translation égale en lon-

[*] Dans l'impression, les *figures* 1 et 2 ont été réduites de moitié.

gueur à la corde ac de l'arc abc (*fig.* 1), est représentée *fig.* 2 (p. 252). On l'a construite en décrivant une circonférence de cercle ayant son centre en O et 5 centimètres de rayon. On a porté sur cette circonférence, à partir du point O′, les arcs s de l'ellipse, et sur les rayons vecteurs correspondants aux extrémités de ces arcs, les longueurs exprimées par y dans la troisième colonne.

Le déplacement par translation correspondant à un quart de révolution a pour mesure

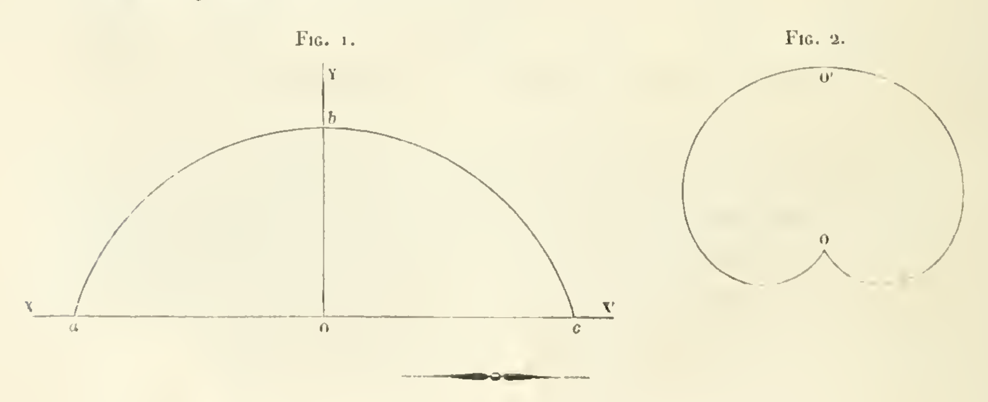
$$\frac{5\pi}{2\sqrt{3}} = 4,5345,$$

c'est-à-dire les 0,324 de la corde ac (*fig.* 1).

Ces diverses données ont été communiquées à M. Plateau, il y a cinq ou six ans. Il fit alors construire en fil de fer les contours de cinq parallèles, qu'il disposa le long d'un axe en fil de fer [*], dans des plans normaux à cet axe et espacés entre eux de $4^c,53$. Chaque parallèle était rencontré par l'axe au point O, et disposé dans son plan de manière que d'un parallèle au parallèle suivant la droite OO′ eût tourné d'un angle droit. Cet appareil étant placé dans un mélange d'eau et d'alcool de même densité que l'huile interposée en quantité convenable entre l'axe et les parallèles, on vit l'hélicoïde se former de lui-même et affecter exactement la forme déterminée par la ligne méridienne (*fig.* 1).

---

[*] L'axe doit être recouvert de fil de coton, pour n'être pas mouillé par l'huile, autrement l'expérience ne reussirait pas.



THÉORÈMES

RELATIFS

AUX FORMES BINAIRES QUADRATIQUES QUI REPRÉSENTENT LES MÊMES NOMBRES;

Par M. SCHERING,

Astronome à l'observatoire de Gottingue.

Les deux théorèmes de M. Dirichlet, l'un d'après lequel toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun, contient une infinité de nombres premiers (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1837, et Journal de M. Liouville, 1re série, t. IV, p. 393), et l'autre, qui concerne la possibilité d'exprimer des nombres premiers par toute forme binaire quadratique proprement primitive (*Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, année 1840, p. 49, et Journal de Crelle, t. XXI, p. 98), sont d'une grande utilité dans l'arithmétique supérieure. Au moyen de ces propositions, on peut prouver le théorème remarqué, mais non démontré, par Legendre (dans sa *Théorie des nombres*, 3e édition, t. I, p. 237), d'après lequel une forme, qui représente tous les nombres représentés par une autre forme, contient cette dernière. La démonstration du théorème que je viens d'énoncer et qui n'éprouve des exceptions que dans des cas particuliers, fera le sujet du présent Mémoire.

THÉORÈME I. — *Si la forme* $axx + 2bxy + cyy$ *de l'ordre* o, *de déterminant* d *et de la* $e^{\text{ième}}$ *espèce, représente tous les nombres qui peuvent être représentés par la forme* $AXX + 2BXY + CYY$ *de l'ordre* O, *de déterminant* D *et de la* $E^{\text{ième}}$ *espèce*, $\frac{EO}{eo}$ *sera entier et* $\frac{EED}{eed}$ *sera un nombre carré entier.*

1°. *On a* $\frac{EO}{eo}$ *entier.*

Pour abréger, nous désignerons une forme

$$AXX + 2BXY + CYY,\quad axx + 2bxy + cyy$$

par (A, B, C), (a, b, c), quand nous ne parlerons pas des valeurs des indéterminées X, Y, x, y. D'après la définition de l'ordre O et de la E^{ième} espèce d'une forme (A, B, C), le nombre O est le plus grand diviseur commun de A, B et C; mais EO est celui de A, 2B et C de manière que E est égal à 1 ou 2 suivant que la forme $\left(\frac{A}{O}, \frac{B}{O}, \frac{C}{O}\right)$ est proprement ou improprement primitive. Dans l'article 228 des *Disquisitiones Arithmeticæ auctore Gauss*, il est démontré qu'on peut représenter par une forme primitive $\left(\frac{A}{O}, \frac{B}{O}, \frac{C}{O}\right)$ un nombre impair ou pair [suivant que la forme est proprement (E = 1) ou improprement (E = 2) primitive] qui n'ait d'autre diviseur commun avec un nombre donné eo que E. Soit En un tel nombre représenté par $\left(\frac{A}{O}, \frac{B}{O}, \frac{C}{O}\right)$, on pourra représenter le nombre EOn par la forme (A, B, C), et comme nous avons supposé que tous les nombres qui peuvent être représentés par la forme (A, B, C) peuvent l'être aussi par (a, b, c), le nombre EOn sera représenté aussi par cette dernière forme. Tous les nombres représentés par (a, b, c) étant divisibles par eo, le nombre EOn le sera aussi, mais comme n n'a pas de diviseur commun avec eo, celui-ci doit être diviseur de EO.

Les formes $\left(\frac{Ea}{o}, \frac{Eb}{o}, \frac{Ec}{o}\right)$ et $\left(\frac{EA}{o}, \frac{EB}{o}, \frac{EC}{o}\right)$ ayant entre eux le même rapport que (a, b, c) et (A, B, C), nous ne considérerons que les premières, ou plutôt nous supposerons que pour la forme (a, b, c), les nombres e et o soient tels, qu'on ait

$$eo = 1 \quad \text{ou} \quad eo = \text{E}.$$

2°. *Les deux déterminants d et D sont entre eux comme des nombres carrés.*

Pour prouver cela, nous nous appuyons sur ce lemme :

Si deux nombres d et D ne sont pas entre eux comme des nombres carrés et qu'aucun des deux ne soit carré, il y aura des nombres par rapport auxquels l'un D est résidu, l'autre d non résidu quadratique.

Soient q et Q les plus grands carrés qui divisent d et D, θ le plus

grand diviseur commun des nombres $\frac{d}{q}$ et $\frac{D}{Q}$, et enfin

$$d = q\theta\theta', \qquad D = Q\theta\theta'',$$

en prenant θ positif si l'un des nombres d, D est positif, et θ négatif si tous deux sont négatifs. Les nombres θ, θ', θ'' seront premiers entre eux, aucun ne sera divisible par un carré et deux parmi eux ne seront pas ensemble égaux à $+1$ ou à -1 et non plus négatifs.

Si θ' diffère de ± 1 et de ± 2, il y aura un nombre premier p qui ne divise ni q ni Q et remplit les conditions $\theta' \mathrm{N} p$, $\theta \mathrm{R} p$, $\theta'' \mathrm{R} p$ et par conséquent aussi celles-ci $d\mathrm{N}p$, $\mathrm{DR}p$, où les caractères R et N indiquent que le nombre précédent est résidu ou non résidu quadratique par rapport au suivant p. En effet, d'après la loi de réciprocité, tous les nombres premiers de la forme $8n+1$ et congrus à certains nombres par rapport au module θ' sont non diviseurs quadratiques de θ', et tous les nombres premiers de la forme $8n+1$ et congrus à certains nombres par rapport au module θ sont diviseurs quadratiques de θ. Donc θ et θ' n'ayant aucun diviseur commun, tous les nombres premiers p de la forme $8n+1$ qui sont congrus à certains nombres par rapport au module $\theta\theta'$, rempliront les conditions $\theta' \mathrm{N} p$, $\theta \mathrm{R} p$. De même on trouve que tous les nombres premiers p congrus à certains nombres par rapport au module $8\theta\theta'\theta''$ remplissent les conditions $\theta' \mathrm{N} p$, $\theta \mathrm{R} p$, $\theta'' \mathrm{R} p$. Mais il y a, comme M. Dirichlet l'a démontré, une infinité de nombres premiers qui sont congrus à un nombre donné par rapport à un module donné, si le module et le nombre donné sont premiers entre eux. Cette condition étant remplie dans notre cas, il y aura une infinité de nombres premiers p pour lesquels on a $\theta \mathrm{R} p$, $\theta' \mathrm{N} p$, $\theta'' \mathrm{R} p$. Parmi eux il y en a qui sont plus grands que q et Q et ainsi ne divisent pas d et D : ils seront diviseurs quadratiques de D, mais non pas de d. De même manière, on démontre que, si θ' est égal à -1 ou à ± 2, il y a des nombres premiers respectivement de la forme $8n+7$ ou $8n+5$ qui remplissent les conditions mentionnées.

Si θ' est égal à $+1$, on peut démontrer d'une manière analogue qu'il y a des nombres premiers qui sont plus grands que q et Q et pour lesquels on a $\theta \mathrm{N} p$, $\theta' \mathrm{R} p$, $\theta'' \mathrm{N} p$ et par suite $d\mathrm{N}p$, $\mathrm{DR}p$.

En revenant à notre théorème, supposons que les déterminants d et D

ne sont pas entre eux comme des nombres carrés et que le nombre premier impair p soit diviseur quadratique de D et non diviseur quadratique de d, en excluant de nos recherches les déterminants qui sont carrés. En désignant par r et s deux nombres entiers qui satisfassent à l'équation

$$rr = D + ps,$$

nous aurons une forme (p, r, s) de déterminant D par laquelle nous pourrons représenter le nombre premier p. La composition de la forme $(p, -r, s)$ et de (A, B, C) produit une autre forme φ qui sera de l'ordre O et de la E^{ième} espèce (article 245 des *Disquisitiones Arithmeticæ*), et par laquelle on peut représenter un nombre n qui n'est pas divisible par p, comme nous avons supposé que p ne divise pas 2D et conséquemment non plus EO. Cela résulte immédiatement de l'article 228 des *Disquisitiones Arithmeticæ*, d'après lequel une forme primitive représente aussi des nombres non divisibles par un nombre donné premier impair. La composition des deux formes proprement primitives et opposée l'une à l'autre (p, r, s) et $(p, -r, s)$ donnant la forme principale $(1, 0, -D)$ d'après l'article 243 des *Disquisitiones Arithmeticæ*, la forme (A, B, C) sera composée des trois formes (p, r, s), $(p, -r, s)$, (A, B, C) et par suite la composée de (p, r, s) et de φ. D'après l'article 242 des *Disquisitiones Arithmeticæ*, on peut représenter par une forme le produit des nombres qui peuvent être représentés par d'autres formes dont la première est composée. La forme (A, B, C) représentera ainsi le produit pn, dont le premier facteur p peut être représenté par (p, r, s) et le second n par φ. Mais n n'étant pas divisible par p, et p étant non-diviseur quadratique de d, le nombre pn ne pourra être représenté par aucune forme de déterminant d et ainsi non plus par (a, b, c). En effet, supposons que cette forme représente pn et désignons par m le plus grand diviseur commun des indéterminées x, y, dans cette représentation, le produit pn sera divisible par mm, et comme p ne divise pas n, ce dernier doit être divisible par mm; donc

$$\frac{n}{mm} = n' \text{ un nombre entier.}$$

De la représentation de pn, on déduit immédiatement une représen-

tation de pn' dans laquelle les valeurs des indéterminées n'ont pas de diviseur commun, mais une telle représentation n'est pas possible d'après l'article 154 des *Disquisitiones Arithmeticæ*, parce que pn' est non diviseur quadratique de d. Donc le nombre pn ne peut pas être représenté par la forme (a, b, c), et c'est pourquoi notre supposition que d et D ne sont pas entre eux comme des carrés n'est pas admissible.

3°. *Si le déterminant* D *est divisible par le nombre premier impair* p *et que l'exposant de sa puissance la plus élevée qui divise l'ordre* O *ou l'exposant de celle qui divise le déterminant* D *soit impair, le déterminant* d *ne sera pas divisible par une puissance plus élevée de* p *que celle qui divise le déterminant* D.

Désignons par p^ν la puissance la plus élevée de p qui divise l'ordre O. La forme $\left(\frac{A}{p^\nu}, \frac{B}{p^\nu}, \frac{C}{p^\nu}\right)$ dont les coefficients ne sont pas tous divisibles par p représente aussi un nombre n qui ne contient pas le nombre p comme diviseur; ainsi la forme (A, B, C) représente le nombre np^ν. Si ν est impair, cela suffira pour notre but; mais si ν est pair, nous chercherons un autre nombre représenté par (A, B, C). En désignant par $p^{2\nu+\mu}$ la puissance la plus élevée qui divise D, nous décomposerons la forme $\left(\frac{A}{p^\nu}, \frac{B}{p^\nu}, \frac{C}{p^\nu}\right)$ dans la forme proprement primitive

$$\left(p^\mu,\ 0,\ \frac{-D}{p^{2\nu+\mu}}\right),$$

et dans une autre (A′, B′, C′) dont les coefficients ne seront pas tous divisibles par p, ce qui est toujours possible d'après l'article 249 des *Disquisitiones Arithmeticæ*. Cette dernière forme représentant aussi un nombre m non divisible par p, la forme $\left(\frac{A}{p^\nu}, \frac{B}{p^\nu}, \frac{C}{p^\nu}\right)$ représentera mp^μ, et la forme (A, B, C) le nombre $mp^{\nu+\mu}$. Comme nous avons supposé $2\nu + \mu$ impair et ν pair, l'exposant $\nu + \mu$ sera impair. Dans ces deux cas (ν impair ou pair), on peut donc représenter par (A, B, C) un nombre lp^λ qui n'est pas divisible par une plus grande puissance de p que p^λ, dont l'exposant λ est impair et $\leqq 2\nu + \mu$.

Comme lp^λ doit être représenté aussi par la forme (a, b, c), il y aura

des nombres entiers x, y qui satisfont à l'équation

$$lp^\lambda = axx + 2bxy + cyy.$$

L'ordre o de la forme (a, b, c) étant égal à 1 ou à 2, il sera permis de supposer a non divisible par p, car cette forme représentant aussi des nombres non divisibles par p (d'après l'article 228 des *Disquisitiones Arithmeticæ*), il y aura nécessairement, parmi les formes proprement équivalentes à (a, b, c) des formes dont le premier coefficient n'est pas divisible par p; mais les formes équivalentes représentent les mêmes nombres, ainsi l'une peut être remplacée par l'autre. En multipliant l'équation par a nous aurons,

$$alp^\lambda = (ax + by)^2 - dyy.$$

Comme λ est impair et al non divisible par p, cette équation ne peut avoir lieu, si d est divisible par $p^{\lambda+1}$; mais D est divisible par $p^{2\nu+\mu}$ et $\lambda \leqq 2\nu + \mu$, donc d n'est pas divisible par une puissance plus élevée de p que celle qui divise le déterminant D.

4°. *Si le nombre premier impair* p *divise le déterminant* D, *et que les exposants des plus grandes puissances qui divisent* D *et* O *soient zéro ou pairs, le déterminant* d *ne sera pas divisible par une puissance plus élevée de* p *que celle qui divise le déterminant* D.

Discutons d'abord le cas aNp.

Si nous désignons par $p^{2\nu}$ la plus grande puissance qui divise l'ordre O, dans la forme $\left(\frac{A}{p^{2\nu}}, \frac{B}{p^{2\nu}}, \frac{C}{p^{2\nu}}\right)$, ainsi que dans (a, b, c), nous pourrons supposer les premiers coefficients $\frac{A}{p^{2\nu}}$, a non divisibles par p (articles 228 et 154 des *Disquisitiones Arithmeticæ*). Le déterminant D contiendra le facteur $p^{4\nu}$, soit $p^{4\nu+2\mu}$ la puissance la plus élevée de p contenue comme diviseur dans D; soit de plus

$$A' = \frac{A}{p^{2\nu}},$$

B' un nombre qui satisfait à la congruence

$$B'p^\mu \equiv \frac{B}{p^{2\nu}} \pmod{A'},$$

et enfin

$$C' = \frac{B'B'p^{4\nu+2\mu} - D}{A'p^{4\nu+2\mu}},$$

nous aurons une forme $(A'p^{2\nu}, B'p^{2\nu+\mu}, C'p^{2\nu+2\mu})$, équivalente à (A, B, C).

La forme (A′, B′, C′), dont le déterminant $\frac{D}{p^{4\nu+2\mu}}$ ne contient pas p comme diviseur représentera nécessairement aussi des résidus quadratiques de p. En effet, si l'on supposait que (A′, B′, C′) ne représente aucun résidu quadratique, le coefficient A′ et tous les nombres m, pour lesquels on a

$$m = A'XX + 2B'XY + C'YY$$

seraient Np. Soit

$$-\sigma\frac{D}{p^{4\nu+2\mu}} \equiv 1 \pmod p;$$

on aurait donc, d'après la dernière équation,

$$\sigma A'm \equiv \sigma(A'X + B'Y)^2 + YY \pmod p.$$

Si σ est Np, le produit $\sigma A'm$ le sera aussi, comme A′ et m sont supposés Np, de même $\sigma(A'm + B'Y)^2$ sera toujours Np. En posant pour Y l'unité et pour X tous les nombres incongrus entre eux par rapport au module p, on obtiendra dans la congruence

$$\sigma A'm \equiv \sigma(A'X + B')^2 + 1 \pmod p$$

pour $\sigma(A'X + B')^2$ tous les non résidus quadratiques de p (art. 98. *Disquisitiones Arithmeticæ*). Donc, comme toutes les valeurs m de l'expression $A'XX + 2B'XY + YY$ pour toutes les valeurs en nombres entiers des indéterminées X, Y sont supposées non résidus, tout non résidu augmenté de l'unité serait aussi non résidu, et par conséquent tous les nombres plus grands qu'un non résidu seraient aussi non résidus.

Si σ est Rp, il résulterait que tous les nombres plus grands que l'unité, qui est Rp, seraient résidus quadratiques de p. Résultats absurdes auxquels nous a conduit la supposition que tous les nombres représentés par (A′, B′, C′) soient Np.

En désignant par g un résidu quadratique de p représenté par la forme (A', B', C'), il y aura des nombres entiers X', Y' qui satisfont à l'équation

$$g = A'X'X' + 2B'X'Y' + C'Y'Y';$$

en multipliant celle-ci par $p^{2\nu+2\mu}$ et faisant

$$X = X'p^{\mu}, \quad Y = Y',$$

nous aurons

$$gp^{2\nu+2\mu} = A'p^{2\nu}XX + 2B'p^{2\nu+\mu}XY + C'p^{2\nu+2\mu}YY.$$

Ainsi le nombre $gp^{2\nu+2\mu}$ peut être représenté par la forme $(A'p^{2\nu}, B'p^{2\nu+\mu}, C'p^{2\nu+2\mu})$, et comme celle-ci est équivalente à (A, B, C), le nombre $gp^{2\nu+2\mu}$ peut donc aussi être représenté par cette dernière.

Si le déterminant d était divisible par $p^{2\nu+2\mu+1}$, le nombre $gp^{2\nu+2\mu}$ ne pourrait être représenté par la forme (a, b, c), car l'équation

$$gp^{2\nu+2\mu} = axx + 2bxy + cyy,$$

ou

$$agp^{2\nu+2\mu} = (ax + by)^2 - dyy,$$

exigerait $ag\,\mathrm{R}p$ contre notre supposition $a\,\mathrm{N}p$ et $g\,\mathrm{R}p$.

Pour l'autre cas $a\,\mathrm{R}p$ on trouve, d'une manière analogue, que la supposition d divisible par $p^{2\nu+2\mu+1}$ ne peut avoir lieu. Ainsi comme D est divisible par $p^{4\nu+2\mu}$, d ne sera pas divisible par une plus grande puissance de p que celle qui divise D.

5°. *Si d est $\equiv 2 \pmod 4$, donc $e = 1 = 0$,* D *sera aussi pair, parce que les déterminants* D *et d sont entre eux comme des nombres carrés.*

6°. *Si d est divisible par 4 et que les formes (a, b, c), $\left(\frac{A}{0}, \frac{B}{0}, \frac{C}{0}\right)$ soient proprement primitives, de sorte que $e = 0 = E = 1$, on peut démontrer, de la manière appliquée aux nombres premiers impairs p, que d ou eed n'est pas divisible par une puissance plus élevée de 2 que celle qui divise* D *ou* EED.

7°. *Si d est divisible par 4 et $e = 1$, $E = 2$, nous démontrerons que d*

ou eed n'est pas divisible par une puissance plus élevée de 2 que celle qui divise 4 D ou EED.

Désignons par 2^ν la puissance la plus élevée de 2 qui divise O, supposons, ce qui est toujours permis, $\frac{A}{E2^\nu}$ et $\frac{a}{o}$ impairs. En considérant le cas $\frac{a}{o} \equiv 1 \pmod 4$, nous représenterons par la forme $\left(\frac{A}{2^\nu}, \frac{B}{2^\nu}, \frac{C}{2^\nu}\right)$ un nombre $\equiv 6 \pmod 8$. Si le nombre $\frac{A}{2^\nu}$, qui peut être représenté par cette forme, n'est pas lui-même $\equiv 6 \pmod 8$, il sera $\equiv 2 \pmod 8$. Le coefficient $\frac{B}{2^\nu}$ étant impair, on peut supposer $\frac{B}{2^\nu} \equiv 1 \pmod 4$, car si cela n'a pas lieu, la forme $\left(\frac{A}{2^\nu}, \frac{B'}{2^\nu}, \frac{C'}{2^\nu}\right)$, où l'on a $B' = B + A$ et $C' = \frac{B'B' - D}{A}$, remplira cette condition et sera équivalente à la formé précédente qu'elle pourra donc remplacer dans nos recherches. En supposant ainsi $\frac{A}{2^\nu} \equiv 2 \pmod 8$, $\frac{B}{2^\nu} \equiv 1 \pmod 4$, et faisant $X \equiv 1 \pmod 2$, $Y \equiv 2 \pmod 4$, on représente par $\frac{A}{2^\nu} XX + 2\frac{B}{2^\nu} XY + \frac{C}{2^\nu} YY$ un nombre $2n$ congru à $6 \pmod 8$; et par $AXX + 2BXY + CYY$ le produit $2n2^\nu$.

Soit

$$axx + 2bxy + cyy = 2n2^\nu,$$

la représentation de $2n2^\nu$ par la forme (a, b, c).

L'ordre o étant égal à 1 ou à 2, le produit $2o$ sera égal à 2°, et la dernière équation, multipliée par a, deviendra

$$(ax + by)^2 - dyy = \frac{a}{o} n 2^{\nu+o}.$$

Donc d ne peut être divisible par $2^{\nu+o+2}$, car autrement nous aurions $\frac{a}{o} n \mathrm{R} 4$, contre notre supposition $\frac{a}{o} \equiv 1 \pmod 4$, et $n \equiv 3 \pmod 4$.

Si $\frac{a}{o}$ est $\equiv 3 \pmod 4$, on prouve d'une manière analogue que d n'est pas divisible par $2^{\nu+o+2}$.

Pour $\nu \geqq 1$ on a $\nu + o + 2 \leqq 2\nu + 2$; mais pour ν égal à zéro, on a $2\nu + 2 = 2$ et $\nu + o + 2$ peut devenir égal à 4. Dans ce cas D est impair; ainsi, parce que D et d sont entre eux comme des carrés, l'exposant de la plus grande puissance de 2 qui divise d sera pair, et d n'étant pas divisible par $2^{\nu+o+2} = 2^4$, il ne sera donc non plus divisible par $2^3 = 2^{2\nu+2+1}$. Il résulte de là que d n'est pas divisible par une plus grande puissance de 2 que $2^{2\nu+2}$, qui est la plus grande puissance de 2 qui divise EED.

8°. *Si* eed *est divisible par* 4, *et que les formes* (a, b, c), $\left(\frac{A}{O}, \frac{B}{O}, \frac{C}{O}\right)$ *soient improprement primitives, e sera* $= 2$, $o = 1$, $d \equiv 1$ $(\text{mod } 4)$; *ainsi* eed *contiendra le nombre 4 comme diviseur, mais non pas* 8. *Le nombre* EO *étant divisible par* eo, D *par* OO, EED *sera divisible par* $eeoo$, *c'est-à-dire par* 4.

Nous avons donc prouvé, pour tout nombre premier pair ou impair, que sa plus grande puissance, qui divise eed, doit diviser aussi EED; par conséquent, $\frac{\text{EED}}{eed}$ sera un nombre entier. Mais D et d sont entre eux comme des nombres carrés; ainsi, $\frac{\text{EED}}{eed}$ doit être un carré entier.

Théorème II. — *Pour que la forme* $\left(2a, \frac{2}{e}b, 2c\right)$ *de déterminant* d, *de l'ordre* $\frac{2}{e}$ *et de la* $e^{\text{ième}}$ *espèce représente tous les nombres qui peuvent être représentés par* $\left(2A, \frac{2}{E}B, 2C\right)$ *de déterminant* D *de l'ordre* $\frac{2}{E}$ *et de la* $E^{\text{ième}}$ *espèce, il est nécessaire et suffisant que la première forme contienne la seconde si* E *ne surpasse pas* e; *mais si* e *est* $= 1$, $E = 2$, *il faut que la forme* $\left(2a, b, \frac{c}{2}\right)$, *où* a *et* b *sont supposés impairs, et, par suite,* $\frac{c}{2}$ *pair (ce qui n'est pas une restriction de la généralité), contienne* $\left(2A, \frac{2}{E}B, 2C\right)$, *que le nombre des classes proprement primitives de déterminant* $\frac{d}{4}$ *ne surpasse pas celui des classes improprement primitives de même déterminant, et que* D *ne soit pas congru à* 1 $(\text{mod } 8)$.

1°. Si e est $=$ E ou $e=2$, $E=1$, le nombre $\frac{EED}{eed}$ étant carré entier, $\frac{D}{d}$ le sera aussi, nous désignerons $\frac{D}{d}$ par $\delta\delta$.

Comme nous avons supposé que l'ordre de la forme $\left(2A, \frac{2}{E}B, 2C\right)$ est $\frac{2}{E}$, les nombres A, B, C ne peuvent être tous pairs. Si A ou C est impair, on représentera par $2AXX + 2\frac{2}{E}BXY + 2CYY$ un nombre pair non divisible par 4, quand on prend un nombre impair pour X et pair pour Y, ou un nombre pair pour X et impair pour Y. Si A et C sont pairs, E sera égal à 2, car autrement (pour $E=1$), la forme serait de la seconde espèce, contre notre supposition qu'elle est de la E^ième^ espèce. En prenant des nombres impairs pour X et Y, on représente aussi dans ce cas un nombre pair non divisible par 4.

Désignons par $2A'$ un nombre qui peut être représenté par la forme $\left(2A, \frac{2}{E}B, 2C\right)$ et qui n'est pas divisible par 4; il y aura, d'après l'article 168 des *Disquisitiones Arithmeticæ*, une forme $\left(2A', \frac{2}{E}B', 2C'\right)$, qui est équivalente à la précédente, et de la même espèce et du même ordre que celle-là. Si B' est pair, E sera l'unité, car autrement la forme serait de l'ordre 2 contre notre supposition, qu'elle est de l'ordre $\frac{2}{E}$, il résulte de là que $B'+EA'=B''$ est impair, en désignant $\frac{4B''B''-EED}{2EEA'}$ par C'', nous aurons une forme $\left(2A', \frac{2}{E}B'', 2C''\right)$, équivalente à $\left(2A', \frac{2}{E}B', 2C\right)$ et à $\left(2A, \frac{2}{E}B, C\right)$; dans la première forme A', B'' sont impairs; il est donc permis de supposer que A et B dans la forme $\left(2A, \frac{2}{E}B, 2C'\right)$ soient impairs. De même nous supposerons a et b dans $\left(2a, \frac{2}{e}b, 2c\right)$ impairs.

On déduit la forme $\left(2A, \frac{2}{E}B, 2C\right)$ de celle (EA, B, EC), en multi-

pliant les coefficients de la dernière par $\frac{2}{E}\cdot$ D'après l'article 243, 1°, des *Disquisitiones Arithmeticæ*, la forme (EA, B, EC) est la composée de (A, B, EEC) et de (E, B, EAC), et, d'après le théorème de M. Dirichlet, la forme proprement primitive (A, B, EEC) représente une infinité de nombres premiers : soit p un de ces nombres qui ne divise pas 2D. Le nombre E peut être représenté par (E, B, EAC); donc Ep par (EA, B, EC) et $\frac{2}{E}$Ep ou $2p$ par $\left(\frac{2}{E}\text{EA}, \frac{2}{E}\text{B}, \frac{2}{E}\text{EC}\right)$, c'est-à-dire par $\left(2\text{A}, \frac{2}{E}\text{B}, 2\text{C}\right)\cdot$ Comme $\left(2a, \frac{2}{e}b, 2c\right)$ représente tous les nombres qui peuvent être représentés par $\left(2\text{A}, \frac{2}{E}\text{B}, 2\text{C}\right)$, elle représentera aussi $2p$. La congruence

$$rr \equiv d (\text{mod } 2p)$$

n'a que deux racines $+r$ et $-r$, et la congruence

$$\text{RR} \equiv \text{D} (\text{mod } 2p),$$

n'a que ces deux $\text{R} \equiv +r\delta$, $\text{R} \equiv -r\delta$ (mod $2p$).

Désignons $\frac{rr-d}{2p}$ par s, l'une des deux formes $(2p, r, s)$, $(2p, -r, s)$ sera proprement équivalente à $\left(2a, \frac{2}{e}b, 2c\right)$, et l'une des deux formes $(2p, r\delta, s\delta\delta)$, $(2p, -r\delta, s\delta\delta)$ proprement équivalente à $\left(2\text{A}, \frac{2}{E}\text{B}, 2\text{C}\right)\cdot$ Cela résulte immédiatement de l'article 168 des *Disquisitiones Arithmeticæ,* d'après lequel il y a toujours un nombre n qui fait la forme $\left(m, n, \frac{nn-\Delta}{m}\right)$ équivalente à une forme donnée, si celle-ci a le déterminant Δ et représente le nombre m. La forme $(2p, \pm r, s)$ se change en $(2p, \pm r\delta, s\delta\delta)$ par la substitution $\begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, \pm\delta \end{pmatrix}$, ainsi la forme $\left(2\text{A}, \frac{2}{E}\text{B}, 2\text{C}\right)$ sera contenue proprement ou improprement sous $\left(2a, \frac{2}{e}b, 2c\right)$ (article 159, *Disquisitiones Arithmeticæ*).

2°. Par les éléments on sait, que la condition de $\left(2\text{A}, \frac{2}{E}\text{B}, 2\text{C}\right)$ con-

tenue sous $\left(2a, \frac{2}{e}b, 2c\right)$ suffit pour que cette dernière forme représente tous les nombres qui peuvent être représentés par la première.

3°. Si e est $=1$, $E=2$, le déterminant D ne peut être $\equiv 1 \pmod 8$.

Supposons $D \equiv 1 \pmod 8$, la forme $\left(4, 1, \frac{1-D}{4}\right)$ sera improprement primitive, et il y aura une forme proprement primitive (A', B', C') dont la composition avec $\left(4, 1, \frac{1-D}{4}\right)$ a pour résultante la forme improprement primitive $(2A, B, 2C)$ (article 251, *Disq. Arith.*). La forme (A', B', C') représente aussi un nombre impair m, et la forme $\left(4, 1, \frac{1-D}{4}\right)$ le nombre 4; ainsi la composée $(2A, B, 2C)$ des deux formes représente le produit $4m$. Si ce produit était représenté par $(2a, 2b, 2c)$, il y aurait des nombres $2l$, $2n$ tels, que la forme $(4m, 2l, 2n)$ serait équivalente à $(2a, 2b, 2c)$; et la forme $(2m, l, n)$ à la forme (a, b, c). Le déterminant D étant $\equiv 1 \pmod 8$ et $\frac{4D}{d}$ un carré, $\frac{d}{4}$ sera $\equiv 1 \pmod 8$, et dans l'équation $\frac{d}{4} = bb - ac = l^2 - 2mn$ le nombre n pair, donc la forme $(2m, l, n)$ est improprement primitive; mais, d'après l'article 161 des *Disquisitiones Arithmeticæ*, une telle forme ne peut équivaloir à une forme proprement primitive (a, b, c). Il résulte de là que le déterminant D ne peut être $\equiv 1 \pmod 8$.

4°. Si e est $=1$, $E=2$, le nombre des classes improprement primitives de déterminant $\frac{d}{4}$ doit être égal au nombre des classes proprement primitives de même déterminant.

La forme $(2A, B, 2C)$ est (d'après l'article 243 des *Disquisitiones Arithmeticæ*) la composée de la forme proprement primitive $(A, B, 4C)$ et de $\left(2, 1, \frac{1-D}{2}\right)$, parce que celle-ci équivaut à $(2, B, 2AC)$. Soit $\mathfrak{L}$ la classe de la forme $(A, B, 4C)$, et $\mathfrak{H}$ la classe de l'une des formes proprement primitives $\left(4, 1, \frac{1-D}{4}\right)\left(4, -1, \frac{1-D}{4}\right)$, celle de l'autre est $2\mathfrak{H}$, et la composition de $\left(2, 1, \frac{1-D}{2}\right)$ avec toute forme des classes $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}+\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}+2\mathfrak{H}$, a pour résultante $(2A, B, 2C)$ (article 256, 7°, des

Disquisitiones Arithmeticæ). Désignons par p un nombre premier non diviseur de $2\mathrm{D}$ et représenté par une forme de la classe $\mathfrak{L}+\mathfrak{G}$, il y aura dans celle-ci une forme $(p,\ r\delta,\ s\delta\delta)$, où δ est $=\frac{4\mathrm{D}}{d}$, et r une racine impaire de la congruence

$$rr\delta\delta \equiv \mathrm{D} \equiv \frac{d}{4}\delta\delta \pmod p.$$

La forme $(2\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ 2\mathrm{C})$, qui est la composée de $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\mathrm{D}}{2}\right)$ et de toute forme de la classe $\mathfrak{L}+\mathfrak{G}$ représentera le produit $2p$.

Si le nombre $2p$ peut être représenté par $(2a,\ 2b,\ 2c)$, la forme $(a,\ b,\ c)$ de déterminant $\frac{d}{4}$ représentera p, et sera par conséquent équivalente à l'une des deux $(p,\ r,\ s)\ (p,\ -r,\ s)$, ce qui résulte de l'article 168, comme nous avons vu auparavant. La forme $(p,\ \pm r,\ s)$ se change en $(p,\ r\delta,\ s\delta\delta)$ par la substitution $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \pm\delta \end{pmatrix}$; donc la classe λ de la forme $(a,\ b,\ c)$ contient proprement ou improprement la classe $\mathfrak{L}+\mathfrak{G}$ de la forme $(p,\ r\delta,\ s\delta\delta)$. De la même manière on prouve que λ contient $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}+2\mathfrak{G}$. Chacune des formes $\left(4,\ +1,\ \frac{1-\mathrm{D}}{4}\right)\left(4,\ -1,\ \frac{1-\mathrm{D}}{4}\right)$, équivaut proprement ou improprement à chacune des $\left(4,\ \delta,\ \frac{4-d}{16}\delta\delta\right)$ $\left(4,\ -\delta,\ \frac{4-d}{16}\delta\delta\right)$, ces dernières formes sont contenues sous $\left(4,\ 1,\ \frac{4-d}{16}\right)$ $\left(4,\ -1,\ \frac{4-d}{16}\right)$; donc les classes η et 2η de celles-ci contiendront les classes $\mathfrak{G}$ et $2\mathfrak{G}$. Comme les classes λ et η contiennent respectivement $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{G}$, la composée $\lambda+\eta$ des deux premières contiendra (d'après l'article 238 des *Disquisitiones Arithmeticæ*) la composée $\mathfrak{L}+\mathfrak{G}$ des deux dernières, et comme λ et 2η contiennent $\mathfrak{L}+2\mathfrak{G}$ et $2\mathfrak{G}$, la composée $\lambda+2\eta$ contiendra $\mathfrak{L}+2\mathfrak{G}+2\mathfrak{G}$, c'est-à-dire $\mathfrak{L}+\mathfrak{G}$, parce que la classe $3\mathfrak{G}$ est la principale. Les trois classes λ, $\lambda+\eta$, $\lambda+2\eta$ contenant ainsi toutes celle $\mathfrak{L}+\mathfrak{G}$, chaque forme de ces classes représentera le nombre premier p, que nous avons supposé représentable par une forme de la classe $\mathfrak{L}+\mathfrak{G}$. Il résulte de là que les deux formes $(p,\ r,\ s)\ (p,\ -r,\ s)$, appartiennent aux trois classes λ, $\lambda+\eta$, $\lambda+2\eta$;

donc, au moins, deux de ces classes sont identiques. On voit facilement que cela ne peut avoir lieu si η n'est pas la classe principale, mais dans ce cas le nombre des classes improprement primitives est égal à celui des proprement primitives de déterminant $\frac{d}{4}$ (article 256, 7°).

5°. Si e est $= 1$, $\mathrm{E} = 2$, la forme $\left(2a, b, \frac{c}{2}\right)$ doit contenir proprement ou improprement $(2\mathrm{A}, \mathrm{B}, 2\mathrm{C})$.

Nous avons vu que $(2\mathrm{A}, \mathrm{B}, 2\mathrm{C})$ est la composée de $\left(2, 1, \frac{1-\mathrm{D}}{2}\right)$ et de toute forme des classes $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}+\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}+2\mathfrak{H}$. Comme $(p, r\delta, s\delta\delta)$ appartient à $\mathfrak{L}+\mathfrak{H}$, la composée $\left(2p, r\delta, \frac{s}{2}\delta\delta\right)$ de $(p, r\delta, s\delta\delta)$ et de $\left(2, 1, \frac{1-\mathrm{D}}{2}\right)$ ou de $\left(2, r, \frac{rr-\mathrm{D}}{2}\right)$ sera équivalente à $(2\mathrm{A}, \mathrm{B}, 2\mathrm{C})$. Dans la forme (a, b, c) le coefficient c est divisible par 4, puisque a et b sont impairs et $bb-ac$ est $= \frac{d}{4} \equiv \mathrm{D} \equiv 1 \pmod 4$, la composée de cette forme et de $\left(2, 1, \frac{4-d}{8}\right)$ sera donc $\left(2a, b, \frac{c}{2}\right)$. Comme (a, b, c) équivaut à l'une des deux (p, r, s) $(p, -r, s)$, la forme $\left(2a, b, \frac{c}{2}\right)$ équivaut aussi à l'une des deux $\left(2p, \pm r, \frac{s}{2}\right)$, qui résulte de la composition de $(p, \pm r, s)$ et de $\left(2, 1, \frac{4-d}{8}\right)$. Mais $\left(2p, \pm r, \frac{s}{2}\right)$ se change en $\left(2p, \pm r\delta, \frac{s}{2}\delta\delta\right)$ par la substitution $\begin{pmatrix}1, 0\\ 0, \pm\delta\end{pmatrix}$; ainsi la forme $\left(2a, b, \frac{c}{2}\right)$ qui est équivalente à la première, contiendra proprement ou improprement $(2\mathrm{A}, \mathrm{B}, 2\mathrm{C})$, qui est équivalente à la seconde.

6°. La dernière partie du théorème, savoir, que ces trois conditions sont suffisantes pour que la forme $(2a, 2b, 2c)$ représente tous les nombres représentés par $(2\mathrm{A}, \mathrm{B}, 2\mathrm{C})$, peut être démontrée au moyen des principes de la représentation des nombres par des formes, et de ceux de la composition des formes; mais nous préférons donner ici une substitution en nombres rompus, par laquelle on obtient, pour tout systeme de valeurs X, Y en nombres entiers, qui satisfont à l'équation

$$m = 2\mathrm{AXX} + 2\mathrm{BXY} + 2\mathrm{CYY},$$

un système de nombres entiers x, y, qui servent à représenter le nombre m par la forme $2axx + 4bxy + 2cyy$.

Les deux premières conditions (en 3° et 4°) peuvent être remplacées par celle-ci, que les plus petites valeurs positives T, U qui satisfont à l'équation

$$\mathrm{TT} - \frac{d}{4}\mathrm{UU} = 4,$$

soient des nombres impairs. En effet, si D est $\equiv 1 \pmod 8$, $\frac{d}{4}$ le sera aussi, et les nombres T, U pairs. Si $\frac{d}{4}$ est $= -3$, nous aurons $\mathrm{T} = 1$, $\mathrm{U} = 1$; mais pour le déterminant -3, il n'y a qu'une seule classe proprement primitive, et une seule improprement primitive. Pour les autres déterminants $\frac{d}{4}$ négatifs congrus à 5 (mod 8), T est $= 2$, $\mathrm{U} = 0$, et le nombre des classes improprement primitives plus petit que celui des classes proprement primitives. Si $\frac{d}{4}$ est positif $\equiv 5 \pmod 8$, d'après un théorème de M. Dirichlet (*Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la théorie des Nombres*, § 8, III. Journal de Crelle, t. XXI, p. 11) les entiers T et U seront impairs ou pairs, selon que le nombre des classes proprement primitives est égal au nombre des classes improprement primitives ou égal au triple de celui-ci.

Au moyen de cet énoncé des conditions, il est facile de démontrer qu'il y a toujours des nombres u, t, tels que la substitution

$$2x = \alpha x' + \beta y',$$
$$2y = \gamma x' + \delta y',$$

dans laquelle les coefficients satisfont aux équations

$$\alpha = t - bu,$$
$$\beta = -\frac{c}{2}u,$$
$$\gamma = au,$$
$$2\delta = t + bu,$$
$$tt - \frac{d}{4}uu = 4,$$

et par laquelle la forme

$$2axx + 4bxy + 2cyy$$

se change en

$$2ax'x' + 2bx'y' + \frac{c}{2}y'y',$$

donne des entiers x, y pour chaque système de nombres entiers x', y'. En effet, α et β sont toujours pairs et δ entier, parce que b est impair, $\frac{c}{2}$ pair, t et u ensemble pairs ou impairs; si y' est pair, toute solution en nombres pairs t, u de l'équation

$$tt - \frac{d}{4}uu = 4$$

remplira notre but, parce qu'elle fait γ pair. Si y' est impair, x' pair, on prendra celle des deux solutions en nombres impairs $t = \mathrm{T}$, $u = \mathrm{U}$ et $t = \mathrm{T}$, $u = -\mathrm{U}$, pour laquelle $t + bu$ est divisible par 4, car alors δ sera pair. On voit facilement que l'un, et seulement l'un des deux nombres pairs $\mathrm{T} + b\mathrm{U}$ et $\mathrm{T} - b\mathrm{U}$, est divisible par 4, puisque leur somme $2\mathrm{T}$ ne l'est pas. Dans le cas de y' et x' impairs, nous prenons celle des deux solutions en nombres impairs $t = \mathrm{T}$, $u = \mathrm{U}$ et $t = \mathrm{T}$, $u = -\mathrm{U}$, pour laquelle $t + bu$ n'est pas divisible par 4, car celle-ci fait γ et δ impairs, ainsi $\gamma x' + \delta y'$ est pair.

La forme $(2a, 2b, 2c)$ représente donc tous les nombres qui peuvent être représentés par $\left(2a, b, \frac{c}{2}\right)$, et comme celle-ci contient $(2\mathrm{A}, \mathrm{B}, 2\mathrm{C})$, et représente ainsi tous les nombres représentés par $(2\mathrm{A}, \mathrm{B}, 2\mathrm{C})$, la première $(2a, 2b, 2c)$ représentera tous les nombres qui peuvent être représentés par $(2\mathrm{A}, \mathrm{B}, 2\mathrm{C})$.

Troisième théorème. — *Pour que la forme* (a, b, c) *de déterminant* d, *de l'ordre* o, *de la* $e^{\text{ième}}$ *espèce, et la forme* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ *de déterminant* D, *de l'ordre* O, *de la* $\mathrm{E}^{\text{ième}}$ *espèce, représentent toujours les mêmes nombres, il est nécessaire et suffisant qu'au moins l'une des deux formes contienne l'autre, que* oe *soit* $= \mathrm{OE}$ *et* $eed = \mathrm{EED}$, *et outre cela, si* e *et* E *sont inégaux, que* $\frac{d}{oo} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{OO}}$ *ait la forme* $8k + 5$, *et que pour ce*

nombre comme déterminant, il y ait autant de classes improprement primitives que de classes proprement primitives.

Comme la forme (a, b, c) représente tous les nombres représentés par (A, B, C), et que celle-ci représente tous les nombres représentés par (a, b, c), on a, d'après le premier théorème $eo = EO$, $eed = EED$. En multipliant les six coefficients des deux formes par 2, et les divisant par $eo = EO$, on obtient des formes $\left(2a', \frac{2}{e}b', 2c\right)$ $\left(2A', \frac{2}{E}B', 2C'\right)$, qui sont des ordres $\frac{2}{e}$ et $\frac{2}{E}$, et de la $e^{ième}$ et $E^{ième}$ espèce. Il est aisé de voir que ces deux formes doivent représenter toujours les mêmes nombres, et qu'on peut leur appliquer directement le théorème précédent; on trouvera de cette manière le théorème proposé.

THÉORÈME ARITHMÉTIQUE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ des nombres entiers indéterminés, mais positifs, qui doivent vérifier une ou plusieurs équations

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_\mu) = 0, \ldots, \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_\mu) = 0,$$

auxquelles peuvent être jointes des conditions limitatives, afin que le système (1) n'ait qu'un nombre fini de solutions. Considérons l'ensemble des solutions de ce système, et pour chacune d'elles décomposons $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ en deux facteurs, de manière à avoir de toutes les manières possibles

$$x_1 = d_1 \delta_1, \quad x_2 = d_2 \delta_2, \ldots, \quad x_\mu = d_\mu \delta_\mu,$$

puis formons les produits

$$d_1 d_2 \ldots d_\mu.$$

Enfin, pour chaque produit ainsi obtenu, cherchons si le nombre n des facteurs premiers (égaux ou inégaux) qui le composent est pair ou impair, en observant que ce nombre n est nul, et par conséquent pair, quand

$$d_1 d_2 \ldots d_\mu = 1 \text{ [*]}.$$

Cela posé, écrivons $+1$ toutes les fois que n est pair, -1 quand n est impair, et faisons la somme algébrique des unités ainsi inscrites. Nous aurons au sujet de cette somme σ (l'excès du nombre des cas où n est pair sur le nombre des cas où n est impair) un théorème que je vais énoncer:

1°. La somme σ peut se réduire à zéro, mais elle n'est jamais négative.

---

[*] Si l'on pose $d_1 d_2 \ldots d_\mu = m$, on verra qu'il s'agit ici de la fonction numérique que nous désignons par $\lambda(m)$. *Voir* le cahier de *juillet* 1857, page 246.

2°. Elle a pour valeur précise le nombre de manières dont on peut poser

$$(2)\qquad f(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_\mu^2) = 0, \ldots, \quad F(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_\mu^2) = 0,$$

$y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ étant des entiers positifs dont les carrés vérifient les conditions limitatives imposées à $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$: en d'autres termes σ est le nombre des solutions du système (1) où $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ sont des carrés.

Je pourrais joindre à ce théorème (dont la démonstration est du reste extrêmement simple) d'autres théorèmes analogues. Je m'en tiendrai à ce qui précède, en ajoutant seulement un exemple. Je prendrai trois inconnues x_1, x_2, x_3 et une seule équation

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 8.$$

On aura ce tableau des solutions de l'équation proposée :

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2; \quad x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 1;$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1; \quad x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1;$$
$$x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1;$$

le groupe

$$x_1 = 1.1, \quad x_2 = 1.1, \quad x_3 = 1.2 = 2.1$$

fournit les deux produits

$$d_1 d_2 d_3 = 1, \quad d_1 d_2 d_3 = 2,$$

dont le premier donne $+1$ et le second -1 qui se compensent : le groupe $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$ fournit à son tour les trois produits 1, 2, 4, d'où $+1$, -1, $+1$, ce qui donne au total une unité positive ; le calcul se fait de même pour les autres groupes, et il en résulte finalement $\sigma = 2$. Or l'équation

$$y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2 = 8$$

a en effet deux solutions en nombres entiers positifs, savoir

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 1$$

et

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 1.$$

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE;

PAR M. FERDINAND **MINDING**,
Professeur à l'université de Dorpat.

Dans le dernier cahier de votre *Journal de Mathématiques* que je viens de recevoir (c'est celui de décembre 1858), on lit un Mémoire de M. Björling sur les cas dans lesquels l'équation

$$\begin{aligned}&(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F)\,dx\\ &+ (A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1)\,dy = 0,\end{aligned}$$

dont l'intégration générale appartient à un ordre plus élevé, devient intégrable par les moyens ordinaires. L'auteur commence par traiter la même équation, mais dépourvue des termes constants F et F_1, pour y appliquer la substitution $z = \frac{x}{y}$: il parvient ainsi à différents cas qui s'intègrent aisément, parmi lesquels se trouve comprise l'équation de Jacobi dépourvue des termes constants; ensuite il passe en revue les circonstances qui se présentent quand on cherche à débarrasser la proposée des dits termes F et F_1.

Autrefois, en m'occupant de l'équation de Jacobi, j'avais fondé son intégration sur une méthode non moins simple et qui ne demande aucune réduction préalable. La base de cette méthode est dans la propriété caractéristique de l'équation proposée, d'offrir trois intégrales particulières de la forme linéaire $y = \alpha x + \beta$ (ou bien $\gamma y = \alpha x + \beta$, pour ne pas exclure, au moins en apparence, le cas de $\gamma = 0$), propriété qui ne paraît pas avoir assez fixé l'attention de ceux qui se sont occupés de l'équation de Jacobi. En partant de ce fait, on peut pour ainsi dire composer presque sans calcul ultérieur la forme définitive de l'intégrale, comme je l'ai montré dans une Note qu'on lit au tome IV du *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, année 1845, p. 375, et qui a encore paru dans le *Journal* de Crelle, t. XL, p. 361. En général, mon but dans cette Note était de montrer

comment on peut, dans bien des cas, profiter de la connaissance de quelques intégrales particulières pour l'intégration des équations différentielles du premier ordre entre deux variables. Il est bien vrai que souvent la connaissance d'intégrales particulières ne sert à rien, comme Euler le fait remarquer dans son chapitre *de integratione æquationum differentialium;* mais on peut quelquefois en tirer parti, et nous avons si peu de moyens pour l'intégration dont il s'agit, que celui-là n'est pas à dédaigner. En parcourant les exemples d'Euler, je me suis assuré que les substitutions les plus cachées qu'il applique pour séparer les variables, perdent leur caractère de hasard, si l'on commence par chercher quelque intégrale particulière de la proposée, et qu'on se trouve, grâce à ce moyen, dans ces cas d'Euler, mis tout de suite sur la voie de l'intégration.

Quant aux autres cas particuliers, dont il est question p. 425-433 du Mémoire de M. Björling, il est nécessaire d'observer que le premier n'aboutit qu'à l'une des équations

$$dx + \lambda\, dy = 0$$

ou

$$(\mathrm{D}x + \mathrm{E}y)\, dx + (\mathrm{D}_1 x + \mathrm{E}_1 y)\, dy = 0.$$

En effet dans ce cas on suppose $\varphi' = \psi'$, en conservant les signes de l'auteur. Or si l'on met encore, pour abréger,

$$\mathrm{A}z^2 + \mathrm{B}z + \mathrm{C} = \mathrm{P},\quad \mathrm{A}_1 z^2 + \mathrm{B}_1 z + \mathrm{C}_1 = \mathrm{P}_1,$$
$$\mathrm{D}z + \mathrm{E} = \mathrm{Q},\qquad \mathrm{D}_1 z + \mathrm{E}_1 = \mathrm{Q}_1,$$

on a

$$\varphi' = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}z + \mathrm{P}_1},\quad \psi' = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}z + \mathrm{Q}_1}.$$

Donc l'hypothèse $\varphi' = \psi'$ entraîne

$$\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{Q}_1}{\mathrm{Q}},$$

égalité qui ne peut subsister que de deux manières, savoir en posant ou Q diviseur de Q_1 ou bien Q diviseur de P. Soit Q diviseur de Q_1; le quotient sera une constante λ, et on aura par conséquent identiquement

$$\mathrm{Q}_1 = \lambda\mathrm{Q},\quad \mathrm{P}_1 = \lambda\mathrm{P};$$

d'où il suit

$$A_1 = \lambda A,\quad B_1 = \lambda B,\quad C_1 = \lambda C,\quad D_1 = \lambda D,\quad E_1 = \lambda E.$$

Ainsi l'équation différentielle proposée devient divisible par

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey,$$

et, en effaçant ce facteur, on tombe sur l'équation

$$dx + \lambda dy = 0.$$

En second lieu, comme on a

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q},$$

si Q est diviseur de P, le quotient est du premier degré. Soit donc

$$P = Q.R.\quad R = Fz + G.$$

On aura encore

$$P_1 = Q_1 R;$$

donc, z étant $= \frac{x}{y}$,

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey &= (Az^2 + Bz + C)y^2 + (Dz + E)y \\ &= Py^2 + Qy = Qy(Ry + 1) = (Dx + Ey)(Fx + Gy + 1) \end{aligned}$$

et de même

$$A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y = (D_1x + E_1y)(Fx + Gy + 1).$$

Donc le facteur commun $Fx + Gy + 1$ étant supprimé, la proposée perd encore tout caractere quadratique et se réduit à

$$(Dx + Ey)\,dx + (D_1x + E_1y)\,dy = 0.$$

Le reste des cas particuliers peut être beaucoup simplifié, en le réunissant sous un point de vue commun. L'équation à traiter est celle-ci (avec les signes de l'auteur) :

$$y(A)\left(\frac{dy}{y} + \varphi' dz\right) + D\left(\frac{dy}{y} + \psi' dz\right) = 0 \quad (\text{p. } 427),$$

ou bien, mettant avec l'auteur

$$\frac{(\mathrm{D})}{(\mathrm{A})} = \mathrm{Z}^2,$$

elle devient

$$(y + \mathrm{Z}^2)\frac{dy}{y} + (y\varphi' + \mathrm{Z}^2\psi')\,dz = 0.$$

Mettons encore avec l'auteur

$$y = \mathrm{Z}^2 v^2,$$

nous aurons

$$(1 + v^2)\left(\frac{zd\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}} + \frac{zdv}{v}\right) + (v^2\varphi' + \psi')\,dz = 0.$$

et posant, pour abréger,

$$\frac{zd\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}dz} + \varphi'\,\zeta. \quad \frac{zd\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}dz} + \psi' = \zeta,$$

l'équation précédente, savoir :

$$(1 + v^2)\frac{2dv}{v} + 2\frac{d\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}} + \psi'\,dz + v^2\left(\frac{zd\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}} + \varphi'\,dz\right) = 0$$

devient

$$(1 + v^2)\frac{2dv}{v} + (\zeta_1 + v^2\zeta)\,dz = 0.$$

Maintenant il est clair que si l'on avait

$$\zeta = 0 \quad \text{ou} \quad \zeta_1 = 0,$$

ou, en général,

$$\zeta_1 = \mu\zeta,$$

μ étant constant, les variables se sépareraient immédiatement. C'est à quoi reviennent tous les cas traités depuis la page 427 jusqu'à la page 433.

Passant à quelque chose de plus général, je saisis cette occasion pour rappeler un théorème proposé dans la Note mentionnée ci-dessus et qui constitue une certaine extension de la règle connue pour l'intégration des équations différentielles homogènes. Le voici :

« Soient M, N, Q des fonctions homogènes de x et y, M et N du même degré n, et Q d'un degré quelconque q, l'équation

$$M dx + N dy + Q(y dx - x dy) = 0$$

s'intègre tout de suite par la substitution de tx pour y, la même dont on se sert pour les équations homogènes. La proposition a encore lieu si Q est une fonction du quotient $\frac{y}{x}$; ce qui du reste n'est qu'un cas compris dans l'énoncé général du théorème, une fonction de $\frac{y}{x}$ devant être considérée comme fonction homogène du degré zéro. »

La démonstration est facile en exécutant la substitution, comme il a été fait dans la Note nommée ci-dessus. Et si, sans aucun changement de variable, on veut introduire un facteur propre à rendre intégrable la proposée, voici à quoi l'on est conduit.

Soit, pour abréger, $Mx + Ny = \omega$,

$$x^{n-q-1} \cdot e^{(n-q-1)\int \frac{Ny}{\omega} d\left(\frac{y}{x}\right)} = U,$$

le facteur cherché sera $\frac{U}{\omega}$, c'est-à-dire qu'on a

$$U \cdot \frac{M dx + N dy + Q(y dx - x dy)}{\omega} = \text{à une différentielle exacte.}$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, comme on sait, qu'on ait

$$\frac{d\left(U \cdot \frac{M + Qy}{\omega}\right)}{dy} = \frac{d\left(U \cdot \frac{M - Qx}{\omega}\right)}{dx}.$$

Or on a

$$\frac{dM}{dx} x + \frac{dM}{dy} y = nM, \qquad \frac{dN}{dx} x + \frac{dN}{dy} y = nN,$$

$$\frac{d\omega}{dx} x + \frac{d\omega}{dy} y = (n+1)\omega, \qquad \frac{dQ}{dx} x + \frac{dQ}{dy} y = qQ,$$

$$\frac{dU}{dx} x + \frac{dU}{dy} y = (n-q-1)U, \qquad M\frac{dU}{dy} = N\frac{dU}{dx},$$

$$\frac{d\left(\frac{M}{\omega}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{N}{\omega}\right)}{dx}.$$

A l'aide de la dernière relation, la condition d'intégrabilité devient

$$\frac{M+Qy}{\omega}\cdot\frac{dU}{dy}+U\frac{d\left(\frac{Qy}{\omega}\right)}{dy}=\frac{N-Qx}{\omega}\cdot\frac{dU}{dx}-U\frac{d\left(\frac{Qx}{\omega}\right)}{dx};$$

ou bien, par l'avant-dernière,

$$\frac{Q}{\omega}\left(\frac{dU}{dx}x+\frac{dU}{dy}y\right)+U\left[\frac{d\left(\frac{Qx}{\omega}\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{Qy}{\omega}\right)}{dy}\right]=0,$$

ce qui donne

$$(n-q-1)\frac{QU}{\omega}+U\left[\frac{2Q}{\omega}+\frac{\frac{dQ}{dx}x+\frac{dQ}{dy}y}{\omega}-\frac{Q\left(\frac{d\omega}{dx}x+\frac{d\omega}{dy}\right)y}{\omega^2}\right]=0,$$

ce qui révient à l'identité

$$(n-q+1)Q+qQ-(n+1)Q=0.$$

Comme nous avons si peu de moyens pour l'intégration des équations différentielles du premier ordre entre deux variables, cette extension de la règle des fonctions homogènes, quelque petite qu'elle soit, me paraît devoir être accueillie dans les traités.

En réfléchissant de nouveau sur ces matières, je trouve qu'on peut beaucoup étendre l'équation de Jacobi et l'application des intégrales particulières pour son intégration. Me réservant de donner ailleurs des explications plus complètes, je vais proposer ici un exemple numérique. Soit

$$M=1+2x+y+3x^2+xy-y^2+2x^2y+xy^2,$$
$$N=1+x+y+2x^2+2xy-2x^3-x^2y,$$

et

$$M\,dx+N\,dy=0.$$

Pour intégrer cette équation, j'observe d'abord qu'elle a quatre intégrales particulières de la forme

$$y=\alpha x+\beta.$$

En effet, on satisfait à cette équation en mettant $\alpha x+\beta$ au lieu de y,

et déterminant α et β par les conditions

$$1 + \beta - \beta^2 + \alpha + \beta\alpha = 0, \quad 3 + 2\beta + 3\alpha + \alpha\beta + \alpha^2 = 0.$$

La première donne α en β; mettant cette valeur dans la seconde, on obtient

$$2\beta^4 + 3\beta^3 + 4\beta^2 + 3\beta + 1 = 0.$$

Cette équation a quatre racines inégales, toutes complexes : je les désignerai par β_1, β_2, β_3, β_4; que les valeurs correspondantes de α soient α_1, etc., et, par suite, on aura

$$\alpha_1 x + \beta_1 = y_1, \ldots,$$

ou bien quatre intégrales particulières y_1, y_2, y_3, y_4. Soit encore

$$\psi y = y - y_1 . y - y_2 . y - y_3 . y - y_4;$$

d'où

$$\frac{\mathrm{M}}{\psi y} = \frac{\mathrm{M}_1}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \ldots + \frac{\mathrm{M}_4}{\psi' y_4 (y - y_4)},$$

$$\frac{\mathrm{N}}{\psi y} = \frac{\mathrm{N}_1}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \ldots + \frac{\mathrm{N}_4}{\psi' y_4 (y - y_4)}.$$

Je représente par M_1 la valeur de M pour $y = y_1$, et ainsi des autres termes. L'équation proposée devient donc

$$\frac{\mathrm{M}_1 dx + \mathrm{N}_1 dy}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \ldots + \frac{\mathrm{M}_4 dx + \mathrm{N}_4 dy}{\psi' y_4 (y - y_4)} = 0.$$

Or on a

$$\mathrm{M}_1 dx + \mathrm{N}_1 dy_1 = 0, \ldots;$$

par conséquent l'équation devient

$$\frac{\mathrm{N}_1 d(y - y_1)}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \frac{\mathrm{N}_2 d(y - y_2)}{\psi' y_2 (y - y_2)} + \frac{\mathrm{N}_3 d(y - y_3)}{\psi' y_3 (y - y_3)} + \frac{\mathrm{N}_4 d(y - y_4)}{\psi' y_4 (y - y_4)} = 0.$$

Soit x' la valeur de x pour laquelle y_1 devient égal à y_2, ou

$$(\alpha_1 - \alpha_2) x' = \beta_1 - \beta_2;$$

on a pour cette valeur de x,

$$\psi' y_1 = 0,$$

puisque

$$\psi' y_1 = y_1 - y_2 . y_1 - y_3 . y_1 - y_4.$$

Donc $\psi' y_1$ est divisible par $x - x'$. Mais N_1 l'est aussi. En effet, on a pour chaque valeur de x

$$M_1 + N_1 \alpha_1 = 0 \quad \text{et} \quad M_2 + N_2 \alpha_2 = 0.$$

Mais la valeur particulière x' de x, en rendant $y_1 = y_2$, rend aussi $M_1 = M_2$ et $N_1 = N_2$; donc on a pour $x = x'$

$$M_1 + N_1 \alpha_1 = 0,$$

et à la fois

$$M_1 + N_1 \alpha_2 = 0;$$

par conséquent, α_2 étant différent de α_1, on a

$$M_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

pour $x = x'$; donc N_1 (et de même M_1) est divisible par $x - x'$. La même démonstration s'applique aux autres valeurs de x qui rendent $y_1 = y_3$ et $y_1 = y_4$, et que je désignerai par x'' et x'''; donc les polynômes N_1 et $\psi' y_1$ sont divisibles tous deux par $x - x'.x - x''.x - x'''$, et puisqu'ils montent au troisième degré en x, le quotient $\frac{N_1}{\psi' y_1}$ est constant. Comme on a

$$N_1 = -(2 + \alpha_1)x^3 + \ldots,$$

on trouve

$$\frac{N_1}{\psi' y_1} = q_1 = \frac{-(2 + \alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)},$$

et puisqu'il en est de même pour les autres termes $\frac{N_2}{\psi' y_2} = q_2$, etc., l'équation proposée se trouve transformée en celle-ci

$$q_1 \frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + q_2 \frac{d(y - y_2)}{y - y_2} + q_3 \frac{d(y - y_3)}{y - y_3} + q_4 \frac{d(y - y_4)}{y - y_4} = 0,$$

qu'on intègre immédiatement.

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

ONZIÈME ARTICLE.

Les formules très-simples que nous donnons dans ce onzième article sont susceptibles d'applications étendues, et nous ne pensons pas qu'on nous reproche de leur avoir accordé une place à part.

Soit m un nombre *impair* donné quelconque. Posons de toutes les manières possibles

$$m = 2m'^2 + m'',$$

puis

$$m'' = d''\delta'',$$

de manière à avoir

$$m = 2m'^2 + d''\delta'',$$

où m' est un entier indifféremment positif, négatif ou nul, tandis que m'', d'', δ'' sont des entiers positifs impairs. C'est à ce mode de partition, peu différent de ceux de nos quatre derniers articles, que se rattache la formule par laquelle nous allons commencer et où figurera une fonction $f(x)$ paire, c'est-à-dire vérifiant l'égalité

$$f(-x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs de x dont on aura à faire usage : on verra que x est toujours un nombre entier impair. La fonction $f(x)$ est du reste une fonction quelconque, algébrique ou numérique.

Considérons la somme double

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} f(\delta'' - 2m'),$$

où le premier $\sum$ porte sur les valeurs de δ'' qui répondent à un groupe déterminé (m', m''), tandis que la seconde s'applique à m' dont les valeurs successives sont $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \omega$, en désignant par ω^2 le plus grand carré inférieur à $\frac{m}{2}$.

Je trouve pour la valeur de cette somme double l'expression assez simple que voici :

$$f(1)\rho(2m-1^2)+f(3)\rho(2m-3^2)+f(5)\rho(2m-5^2)+\ldots \\ +f(2n-1)\rho[2m-(2n-1)^2];$$

le terme général de cette suite est

$$f(2s-1)\rho[2m-(2s-1)^2];$$

on fait $s=1, 2, 3, \ldots$, et l'on s'arrête à la valeur $s=n$, au delà de laquelle le nombre placé sous le signe ρ deviendrait négatif. Ainsi on a encore

$$2m-(2n-1)^2>0,$$

mais

$$2m-(2n+1)^2<0.$$

Nous donnons ici au signe $\rho(m)$ la même signification que dans nos autres articles : m étant un entier impair décomposé en deux facteurs, de manière que

$$m=d\delta,$$

nous faisons

$$\rho(m)=\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

la sommation portant sur les valeurs de d.

La formule

$$(\xi)\quad \sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}f(\delta''-2m')=f(1)\rho(2m-1^2)+f(3)\rho(2m-3^2)+\ldots+f(2n-1)\rho[2m-(2n-1)^2],$$

dans laquelle se résume ce qui précède, nous semble tres-élégante.

Soit, par exemple, $m = 5$. Les solutions de l'équation

$$m = 2m'^2 + d''\delta''$$

seront au nombre de six, savoir

$$\begin{array}{llllll} m' = 0, & d'' = 5, & \delta'' = 1; & m' = 0, & d'' = 1, & \delta'' = 5; \\ m' = 1, & d'' = 3, & \delta'' = 1; & m' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 3; \\ m' = -1, & d'' = 3, & \delta'' = 1; & m' = -1, & d'' = 1, & \delta'' = 3; \end{array}$$

la somme double est donc

$$f(1) + f(5) + f(-1) - f(1) + f(3) - f(5),$$

et eu égard à l'équation

$$f(-1) = f(1),$$

elle se réduit à

$$f(1) + f(3):$$

or c'est bien là une quantité égale à

$$f(1)\rho(9) + f(3)\rho(1),$$

puisque l'on a

$$\rho(9) = 1 \quad \text{et} \quad \rho(1) = 1.$$

On sait que $\rho(m)$ exprime le nombre des décompositions de $2m$ en une somme de deux carrés impairs à racines positives, et que le nombre des solutions entières de l'équation

$$2^{\alpha} m = u^2 + v^2,$$

est $4\rho(m)$, quel que soit l'exposant α, quand on admet pour u et v le double signe $\pm$: ce nombre se réduirait à $\rho(m)$ pour l'équation

$$m = u^2 + v^2,$$

si l'on exigeait que u fût impair et positif, en laissant à v le double signe quand v peut le prendre, c'est-à-dire quand v n'est pas zéro.

Ceci nous permet de présenter le second membre de l'équation (ξ)

sous une autre forme qui se lie directement aux décompositions des nombres en trois carrés. Posons en effet de toutes les manières possibles

$$2m = i^2 + i_1^2 + p^2.$$

i et i_1 étant des nombres impairs positifs, tandis que p est pair et susceptible du double signe $\pm$ quand il ne se réduit pas à zéro. Attachons-nous, dans l'équation

$$2m = i^2 + i_1^2 + p^2,$$

au premier terme i^2 du second membre, et cherchons la somme

$$\sum f(i)$$

des valeurs de $f(i)$ prises pour toutes les valeurs de i. Ces dernières doivent être cherchées dans la suite 1, 3, 5,..., $2n-1$, et chaque nombre i convenable se présente autant de fois que l'équation

$$2m - i^2 = i_1^2 + p^2$$

a de solutions (i_1, p), c'est-à-dire un nombre de fois marqué par $\rho(2m - i^2)$, d'où résulte dans l'expression de

$$\sum f(i)$$

le terme

$$f(i)\rho(2m - i)^2:$$

il faut donc ajouter entre eux tous les termes ainsi obtenus, et l'on pourra sans inconvénient faire porter la somme sur tous les nombres 1, 3, 5,..., $2n-1$, car on a

$$\rho(2m - i^2) = 0,$$

pour ceux d'entre eux qui rendent impossible l'équation

$$2m - i^2 = i_1^2 + p^2.$$

On a donc

$$\sum f(i) = f(1)\rho(2m - 1^2) + f(3)\rho(2m - 3^2) + \ldots$$
$$+ f(2n-1)\rho[2m - (2n-1)^2],$$

en sorte que

$$\sum f(i)$$

est précisément la valeur du second membre de l'équation (ξ).

La formule (ξ) peut donc être remplacée par celle-ci :

$$(\epsilon) \qquad \sum\sum (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} f(\delta'' - 2m') = \sum f(i),$$

i désignant successivement tous les nombres impairs pour lesquels

$$2m = i^2 + i_1^2 + p^2,$$

et chacun des nombres i étant pris autant de fois qu'il se présente dans l'ensemble des solutions qui les définit.

Comme les valeurs de x qu'on doit employer dans $f(x)$ sont d'un côté exprimées par i et de l'autre par $\delta'' - 2m'$, et sont par suite des entiers essentiellement impairs, on voit que l'équation

$$f(-x) = f(x)$$

est vérifiée quand on prend

$$f(x) = (-1)^{\frac{x-1}{2}} x.$$

La formule (ξ) nous donne dès lors

$$\sum\sum (-1)^{m'}(\delta'' - 2m') = 1.\rho(2m - 1^2) - 3.\rho(2m - 3^2) + \ldots$$
$$\pm (2n-1)\rho[2m - (2n-1)^2];$$

mais ce résultat se simplifie en observant que l'on a

$$\sum (-1)^{m'} m' = 0,$$

parce que les valeurs de m' autres que zéro sont deux à deux égales

et de signes contraires. En faisant suivant notre usage

$$\sum \delta'' = \zeta_1(m'') = \zeta_1(m - 2m'^2),$$

il nous viendra donc

$$\sum (-1)^{m'} \zeta_1(m - 2m'^2) = 1.\rho(2m - 1^2) - 3.\rho(2m - 3^2) + \ldots \pm (2n-1)\rho[2m - (2n-1)^2].$$

Le second membre peut être remplacé par

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

comme le donnerait de suite la formule (o). Quant au premier membre, qui développé s'écrit

$$\zeta_1(m) - 2\zeta_1(m - 2.1^2) + 2\zeta_1(m - 2.2^2) - \ldots \pm 2\zeta_1(m - 2\omega^2),$$

il comporte une interprétation analogue. Rappelons-nous en effet que $8\zeta_1(m)$ est le nombre des représentations du nombre impair m par une somme de quatre carrés, et nous verrons que si l'on pose

$$m - 2m'^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2,$$

par conséquent

$$m = 2m'^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2,$$

où m_1, m_2, m_3, m_4 désignent, comme m', des entiers positifs ou négatifs, ou zéro, l'excès

$$N_2 - N_1$$

du nombre des cas où m' est pair sur le nombre des cas où m' est impair vaut huit fois la quantité

$$\zeta_1(m) - 2\zeta_1(m - 2.1^2) + 2\zeta_1(m - 2.2^2) - \ldots \pm 2\zeta_1(m - 2\mu^2).$$

Nous avons donc finalement l'équation très-simple

$$N_2 - N_1 = 8\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}}.i,$$

qui rattache l'un à l'autre les deux modes de partition indiqués par

$$2m = i^2 + i_1^2 + p^2$$

et

$$m = 2m'^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2.$$

Nos formules fournissent beaucoup de résultats du même genre; mais on conçoit que pour leur donner tout leur prix, il faudrait non-seulement les développer davantage, mais encore les présenter dans un ordre systématique et les enchaîner entre eux : nous devons désirer aussi que notre analyse tire en quelque sorte tout d'elle-même. Ce sera l'objet d'un autre travail, et nous osons espérer qu'il en sortira des ressources nouvelles pour la science des nombres. Aujourd'hui il ne s'agit que d'une simple esquisse, et nous ne pouvons qu'effleurer le sujet. Nous nous servons, pour abréger, de ce qui est connu ; c'est ainsi que nous allons encore employer un théorème d'Eisenstein ou plutôt de Jacobi sur la décomposition d'un nombre impair en six carrés, qu'il nous serait aisé de démontrer à notre manière, et que nous démontrerons en effet, mais plus tard.

Soit $m = d\delta$ un nombre impair donné; le nombre des représentations de m par six carrés, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$m = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2,$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_6$ sont des entiers indifféremment positifs ou négatifs, ou zéro, est

$$12 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \delta^2,$$

quand m est de la forme $4\nu + 1$, mais

$$20 \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \delta^2$$

quand m est de la forme $4\nu + 3$.

Nous allons appliquer ce théorème à l'équation qu'on déduit de la formule (φ) lorsqu'on prend

$$f(x) = x^2.$$

Cette équation

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}(\delta''^2-4m'\delta''+4m'^2)=\sum i^2$$

se simplifie à cause du double signe des valeurs de m' autres que zero, et se réduit à

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}(\delta''^2+4m'^2)=\sum i^2.$$

Le premier membre se décompose en deux parties distinctes

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\delta''^2$$

et

$$4\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}m'^2.$$

Dans la première j'observe qu'on doit faire d'abord la somme

$$\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\delta''^2$$

pour les valeurs de δ'' qui conviennent au nombre $m''=d''\delta''$, contenu dans l'équation

$$m=2m'^2+m'',$$

puis faire le total pour tous les groupes (m', m''). Cela posé, remarquons que quand m'' est de la forme $4\nu+1$, on a

$$(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}=(-1)^{\frac{d''-1}{2}},$$

tandis que quand m'' est de la forme $4\nu+3$, on a au contraire

$$(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}=-(-1)^{\frac{d''-1}{2}}.$$

Ainsi, dans le premier cas,

$$\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\delta''^2=\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\delta''^2,$$

tandis que dans le second cas

$$\sum (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \delta'''^2 = -\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} \delta'''^2.$$

Toujours on est conduit à la fonction numérique dont dépend le nombre des représentations de m'' par six carrés. Ajoutons que si m est de la forme $4\nu + 1$, m'' sera aussi de cette forme pour les valeurs paires de m' et de la forme opposée $4\nu + 3$ pour les valeurs impaires : ce sera l'inverse si m est de la forme $4\nu + 3$. Observons enfin que l'équation

$$m'' \text{ ou } m - 2m'^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2$$

entraîne celle-ci

$$m = 2m'^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2,$$

et il nous sera aisé d'en conclure que si l'on désigne par $\mathfrak{N}_1$ le nombre des solutions de l'équation

$$m = 2m'^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2,$$

où m' est impair, et par $\mathfrak{N}_2$ le nombre des solutions où m' est pair, on aura

$$\sum\sum (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \delta'''^2 = \frac{1}{12}\mathfrak{N}_2 - \frac{1}{20}\mathfrak{N}_1,$$

quand m est de la forme $4\nu + 1$, et

$$\sum\sum (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \delta'''^2 = \frac{1}{12}\mathfrak{N}_1 - \frac{1}{20}\mathfrak{N}_2,$$

quand m est de la forme $4\nu + 3$.

Occupons-nous à présent de l'autre somme double

$$4\sum\sum (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} m'^2;$$

elle peut s'écrire

$$4\sum m'^2 \rho(m''),$$

ou encore

$$\sum (2m')^2 \rho(m - 2m'^2),$$

et l'on verra sans peine qu'elle s'exprime par

$$\sum p^2,$$

si l'on se reporte à l'équation

$$2m = i^2 + i_1^2 + p^2 :$$

cela tient à ce que si l'on fait $p = 2m'$, on change cette équation en celle-ci

$$2(m - 2m'^2) = i^2 + i_1^2$$

dont le nombre des solutions pour chaque valeur donnée de m' est

$$\rho(m - 2m'^2).$$

Définitivement, nous avons donc

$$\frac{1}{12}\mathfrak{N}_2 - \frac{1}{20}\mathfrak{N}_1 = \sum i^2 - \sum p^2,$$

quand m est de la forme $4\nu + 1$, et

$$\frac{1}{12}\mathfrak{N}_1 - \frac{1}{20}\mathfrak{N}_2 = \sum i^2 - \sum p^2,$$

quand m est de la forme $4\nu + 3$. A cela on joindra, si l'on veut, cette autre formule

$$2\sum i^2 + \sum p^2 = 2m\text{M},$$

qu'il est très-facile d'établir et où M désigne le nombre des solutions de l'équation

$$2m = i^2 + i_1^2 + p^2 \ [*].$$

[*] M n'est pas le nombre complet des représentations de $2m$ par une somme de trois carrés; ce serait 12 M que l'on obtiendrait en cessant de fixer au dernier rang le carré pair et en rendant le double signe aux racines des carrés impairs.

Soit, par exemple, $m = 5$, d'où

$$2m = 10 = 1^2 + 3^2 + 0^2 = 3^2 + 1^2 + 0^2 :$$

il s'ensuivra

$$M = 2, \quad \sum i^2 = 10, \quad \sum p^2 = 0,$$

ce qui déjà vérifie l'équation

$$2\sum i^2 + \sum p^2 = 2mM.$$

Pour trouver $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ qui répondent respectivement à $m' = \pm 1$ et $m' = 0$, il faut chercher d'une part le double du nombre des représentations de l'entier 3 par six carrés et d'autre part le nombre des représentations de 5. On trouve

$$\frac{1}{20}\mathfrak{N}_1 = 16, \quad \frac{1}{12}\mathfrak{N}_2 = 26;$$

l'équation

$$\frac{1}{12}\mathfrak{N}_2 - \frac{1}{20}\mathfrak{N}_1 = \sum i^2 - \sum p^2$$

se vérifie donc aussi. Le calcul se fera de même pour $m = 7$: il viendra

$$M = 4, \quad \sum i^2 = 20, \quad \sum p^2 = 16, \quad \frac{1}{12}\mathfrak{N}_1 = 52, \quad \frac{1}{20}\mathfrak{N}_2 = 48;$$

mais dans ce cas c'est l'équation

$$\frac{1}{12}\mathfrak{N}_1 - \frac{1}{20}\mathfrak{N}_2 = \sum i^2 - \sum p^2$$

qui aura lieu.

On arrive encore à des résultats intéressants quand on prend

$$f(x) = \cos(xt),$$

t étant une constante quelconque; mais je ne veux pas pousser plus loin ces détails. Je me contenterai de transcrire le résultat simplifié,

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \cos\delta''' t \cos 2m't = \sum \cos it,$$

que l'on obtient en développant

$$\cos(\delta'' - 2m')t$$

et en omettant ensuite la partie qui s'annule par l'opposition des signes de m'.

La formule (ξ) est comprise comme cas particulier dans une formule que je vais donner à présent et qui contient une fonction arbitraire $f(x, y)$ de deux variables. La fonction $f(x, y)$ est paire, je veux dire vérifie les conditions

$$f(-x, y) = f(x, y), \quad f(x, -y) = f(x, y),$$

pour toutes les valeurs de x, y dont on aura à faire usage : on pourra s'assurer que x est toujours un entier impair et y un entier simplement pair.

Soit, comme ci-dessus, m un nombre impair donné. Posons de toutes les manières possibles

$$m = 2m'^2 + m'' = 2m'^2 + d''\delta'',$$

m' étant un entier à volonté positif, négatif ou nul, tandis que m'', d'', δ'' sont essentiellement impairs et positifs. C'est le mode de partition employé plus haut : à lui se rapporte la somme double

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} f(\delta'' - 2m', 2d'' + 4m').$$

Maintenant posons

$$2m = m_1^2 + m_2,$$

m_1 et m_2 étant positifs et impairs, ainsi que les deux facteurs d_2, δ_2 dans lesquels nous décomposerons ensuite m_2, de façon que

$$2m = m_1^2 + d_2\delta_2 :$$

ce mode de partition n'a été employé plus haut qu'implicitement : il nous le faut ici sous forme explicite. C'est à lui que se rattache la seconde somme double

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} f(m_1, d_2 + \delta_2)$$

dont nous avons besoin. Notre théorème consiste, en effet, en ce que les deux sommes doubles citées ont des valeurs égales.

Ainsi nous disons que l'on a

$$(\pi)\quad \sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} f(\delta''-2m', 2d''+4m') = \sum\sum(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} f(m_1, d_2+\delta_2).$$

Soit, par exemple, $m=3$. Le premier membre dépendra des données suivantes :

$$m'=0,\ d''=3,\ \delta''=1;\quad m'=0,\quad d''=1,\ \delta''=3;$$
$$m'=1,\ d''=1,\ \delta''=1;\quad m'=-1,\ d''=1,\ \delta''=1.$$

Il sera donc égal à

$$f(1,6)-f(3,2)+f(-1,6)+f(3,-2),$$

et réduction faite à $2f(1,6)$. Or c'est bien ce qu'on trouve au second membre, où les valeurs à employer sont

$$m_1=1,\ d_2=5,\ \delta_2=1;\quad m_1=1,\ d_2=1,\ \delta_2=5.$$

Pour tirer de la formule générale (π) notre ancienne formule (ξ), on n'a qu'à supposer la fonction $f(x,y)$ indépendante de y et réduite à une fonction $f(x)$ de x, vérifiant, bien entendu, la condition

$$f(-x)=f(x).$$

Le premier membre deviendra tout d'abord

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} f(\delta''-2m')$$

et coïncidera avec le premier membre de la formule (ξ). Quant au second, il se présente de cette manière :

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} f(m_1).$$

La première sommation à effectuer porte sur δ_2, et, d'après notre no-

tation habituelle, on a

$$\sum(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} = \rho(m_2) = \rho(2m - m_1^2).$$

Nous avons donc pour la somme double cherchée cette valeur simple

$$\sum \rho(2m - m_1^2) f(m_1).$$

En la développant, on doit, d'après l'équation

$$2m = m_1^2 + m_2,$$

où m_2 est >0, s'arrêter au moment où les termes sous le signe ρ deviendraient négatifs; d'ailleurs m_1 est impair et positif : il vient donc

$$f(1)\rho(2m-1^2) + f(3)\rho(2m-3^2) + \ldots$$
$$+ f(2n-1)\rho[2m-(2n-1)^2],$$

comme au second membre de la formule (ξ).

Je ne veux pas m'arrêter plus longtemps à la formule (π). Je ne puis pourtant me dispenser d'écrire la formule particulière, mais utile encore, que l'on obtient en remplaçant $f(x, y)$ par une simple fonction de y, vérifiant la condition

$$f(-y) = f(y).$$

La voici :

$$\sum\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} f(2d'' + 4m') = \sum\sum(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} f(d_2 + \delta_2)$$

Je passe à d'autres équations.

Revenons au mode de partition employé dans notre septième article : m étant un entier donné, pair ou impair, comme on voudra, posons de toutes les manières possibles

$$m = m'^2 + m'', \quad m'' = 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

par suite

$$m = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

m' étant un entier indifféremment positif, nul ou négatif, tandis que m'', d'', δ'' sont positifs ; de plus, on suppose d'' et δ'' impairs : $2^{\alpha''}$ est donc la plus haute puissance de 2 qui divise m'', et quand m'' est impair, on a $\alpha'' = 0$. C'est à ce mode de partition que se rapporte la somme double

$$\sum\sum(-1)^{m' + \frac{\delta''-1}{2}} f(2^{\alpha''} d'' + m'),$$

que nous devons d'abord considérer : le premier $\sum$ est relatif aux valeurs conjuguées δ'' et $2^{\alpha''} d''$ dont le produit est un des nombres m'' : le second aux groupes successifs (m', m'') que l'on obtient en posant

$$m' = 0, \quad m' = \pm 1, \quad m' = \pm 2, \ldots, \quad m' = \pm \omega,$$

ω^2 étant le plus grand carré inférieur à m. La fonction $f(x)$ doit vérifier la condition $f(-x) = f(x)$.

Maintenant au moyen des représentations de m par trois carrés, c'est-à-dire au moyen de l'équation

$$m = s^2 + s'^2 + s''^2,$$

formons cette autre somme

$$\sum\sum(-1)^s f(s')$$

où la fonction f est la même et qui s'applique à toutes les valeurs correspondantes de s et de s' dans l'équation citée, puis retranchons-la du quadruple de la première.

Le théorème consiste en ce que la différence indiquée

$$4\sum\sum(-1)^{m' + \frac{\delta''-1}{2}} f(2^{\alpha''} d'' + m') - \sum\sum(-1)^s f(s')$$

est généralement nulle : il n'y a exception que quand m est un carré.

et alors elle est égale à

$$2(-1)^{m-1} f(\sqrt{m}).$$

En d'autres termes, on a

$$(\rho) \quad \left\{ \begin{aligned} & 4\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} f(2^{\alpha''}d''+m') - \sum\sum(-1)^{s} f(s') \\ & \qquad = 2(-1)^{m-1} f(\sqrt{m}), \quad \text{ou} \quad = 0, \end{aligned} \right.$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Soit, par exemple, $m = 1$: on ne pourra faire que

$$m' = 0, \quad 2^{\alpha''}d'' = 1, \quad \delta'' = 1,$$

et la première somme se réduira au seul terme $f(1)$, d'où $4f(1)$ dans l'équation (ρ). Il y a six représentations de 1 par trois carrés, savoir :

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 = 0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 = 0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2.$$

Ceci introduira dans le premier membre de l'équation (ρ) ces autres termes à ajouter au terme déjà trouvé :

$$f(0) + f(0) - f(1) - f(-1) - f(0) - f(0);$$

de sorte que $f(-1)$ étant égal à $f(1)$, il viendra finalement $2f(1)$, et c'est bien ce que donne le second membre, l'unité étant un carré.

Soit encore

$$m = 2:$$

on aura

$$m' = 0, \quad 2^{\alpha''}d'' = 2, \quad \delta'' = 1,$$

puis

$$m' = \pm 1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 1, \quad \delta'' = 1;$$

d'un autre côté

$$\begin{aligned} 2 &= 0^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 = (\pm 1)^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 \\ &= (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2. \end{aligned}$$

Comme les quatre représentations de 2 qui ne diffèrent que par le signe $\pm$ donnent la même valeur de $(-1)^s f(s')$, on trouvera pour le premier membre de l'équation (ρ)

$$4[f(2)-f(2)-f(0)-f(1)+f(0)+f(1)],$$

c'est-à-dire zéro, comme cela doit être.

Pour $m=3$, on aura

$$m'=0,\quad 2^{\alpha''}d''=3,\quad \delta''=1;\qquad m'=0,\quad 2^{\alpha''}d''=1,\quad \delta''=3;$$
$$m'=1,\quad 2^{\alpha''}d''=2,\quad \delta''=1;\qquad m'=-1,\quad 2^{\alpha''}d''=2,\quad \delta''=1;$$

d'ailleurs l'équation

$$3=(\pm 1)^2+(\pm 1)^2+(\pm 1)^2$$

fournit pour $(-1)^s f(s')$ huit fois le même terme $-f(1)$, d'où, en changeant le signe, $8f(1)$. On trouve donc encore zéro pour résultat final, vu que

$$4[f(3)-f(1)-f(3)-f(1)]+8f(1)=0.$$

Quand m est de la forme $4^k(8\nu+7)$, il ne peut être égal ni à un carré, ni à une somme de trois carrés : ainsi la somme

$$\sum(-1)^s f(s')$$

se réduit à zéro, et le second membre de l'équation (ρ) est toujours égal à zéro. Dans ce cas donc, on a simplement

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} f(2^{\alpha''}d''+m')=0.$$

Posons, dans l'équation (ρ),

$$f(x)=x^2.$$

Il nous viendra

$$4\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}}(2^{\alpha''}d''+m')^2-\sum(-1)^s s'^2$$
$$=2(-1)^{m-1}m,\ \text{ou}\ =0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré; mais en développant

$$(2^{\alpha''}d'' + m')^2$$

et en observant que l'on a

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} 2^{\alpha''}d''m' = 0,$$

à cause du double signe qu'on doit donner aux valeurs de m' autres que zéro, on obtient cette autre équation

$$4\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}}(2^{2\alpha''}d''^2 + m'^2) - \sum(-1)^s s'^2$$
$$= 2(-1)^{m-1}m, \text{ ou } = 0.$$

Le terme

$$\sum(-1)^s s'^2$$

dépend de la décomposition de m en trois carrés; mais pour interpréter la somme double

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}}(2^{2\alpha''}d''^2 + m'^2),$$

il faudra tout à la fois recourir aux décompositions en trois carrés et aux décompositions en six ou même en sept carrés. Bornons-nous ici à donner l'énoncé d'un théorème auquel la discussion détaillée que nous supprimons conduit quand m est un nombre impair de la forme $8\nu + 7$, ce qui est le cas le plus simple parce que l'expression de m par un carré et par trois carrés étant alors impossible, notre équation se réduit à

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} 2^{2\alpha''}d''^2 = 0:$$

on a d'ailleurs $\alpha'' = 0$ quand m' est impair et $\alpha'' = 1$ quand m est pair. On en conclut aisément que si considérant l'équation

$$8\nu + 7 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2 + m_7^2,$$

où le premier membre est donné, et où $m_1, m_2, \ldots, m_7$ sont des entiers de signes quelconques (zéro compris), on cherche d'une part le nombre N_1 des solutions où le premier terme m_1 est impair et d'autre part le nombre N_2 des solutions où m_1 est pair, on trouvera toujours entre N_1 et N_2 ce rapport

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{17}{20}.$$

Soit, par exemple, $\nu = 0$. Le nombre N_1 sera fourni par les deux équations

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2$$

et

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2,$$

dans la seconde desquelles on opérera entre les six derniers carrés toutes les permutations possibles. Ainsi

$$N_1 = 2^7 + 2^4 \cdot \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.3} = 2^6.17.$$

Le nombre N_2 sera fourni à son tour par les deux équations

$$7 = 0^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2$$

et

$$7 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2,$$

en ne laissant fixes dans chacune d'elles que le premier carré. On a donc

$$N_2 = 2^4 \cdot \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2\ 1.2.3} + 2^4 \frac{1.2.3.4.5.6}{1\ 2.3.1.2.3} = 2^6.20.$$

Le rapport de N_1 à N_2 est bien celui de 17 à 20.

Soit encore $\nu = 1$. Tout sera fourni par les équations fondamentales :

$$15 = 9 + 4 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0,$$
$$15 = 9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$
$$15 = 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 0,$$

en y introduisant le double signe $\pm$ et en effectuant les permutations; on trouve

$$N_1 = 2^6\,7.17, \quad N_2 = 2^6.7.20 :$$

le rapport indiqué subsiste.

Avant de quitter la formule (ρ), j'écrirai encore le résultat important qu'elle fournit quand on y pose

$$f(x) = \cos(xt),$$

t étant une constante quelconque : après une simplification facile, on obtient

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} \cos(2^{\alpha''}d''\,t)\cos m'\,t - \sum(-1)^s \cos(s'\,t)$$
$$= 2(-1)^{m-1}\cos\left(t\sqrt{m}\right), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Maintenant, je réduis de nouveau le nombre m à n'être plus qu'impair et même de la forme $4\nu+1$; et je l'assujettis au mode de partition marqué par les équations, en nombres entiers,

$$m = 4m'^2 + m'', \quad m'' = d''\,\delta'',$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation unique,

$$m = 4m'^2 + d''\,\delta'',$$

où d'' et δ'' sont impairs et positifs, tandis que m' est indifféremment positif ou négatif ou même zéro.

Cela admis, je désigne par $\psi(x)$ une fonction de x algébrique ou numérique absolument quelconque, et je forme la somme double

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}}\,\psi\left(m' + \frac{d''-\delta''}{4}\right),$$

où le premier $\sum$ porte à l'ordinaire sur les valeurs conjuguées d'', δ'' qui répondent à un même produit m'', tandis que le second s'applique

aux groupes successifs (m', m'') que l'on obtient en prenant

$$m' = 0, \quad m' = \pm 1, \quad m' = \pm 2, \ldots, \quad m' = \pm \omega,$$

en désignant par $4\omega^2$ le carré pair immédiatement inférieur à m.

Je trouve que la somme double indiquée est généralement égale à zéro : il n'y a exception que quand m est un carré, et alors elle a cette valeur très-simple

$$(-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}} \sqrt{m}\, \psi(0).$$

Ainsi l'on a

$$(\sigma) \sum\sum (-1)^{m' + \frac{\delta''-1}{2}} \psi\left(m' + \frac{d''-\delta''}{4}\right) = (-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}} \sqrt{m}\, \psi(0), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Pour la vérifier numériquement, prenons d'abord $m = 5$: nous aurons à considérer les valeurs de m', d'' et δ'' ci-après :

$$m' = 2, \quad d'' = 5, \quad \delta'' = 1; \qquad m' = 0, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 5;$$
$$m' = 1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 1; \qquad m' = -1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 1;$$

le premier membre de l'équation (σ) sera donc

$$\psi(1) + \psi(-1) - \psi(1) - \psi(-1),$$

quantité égale à zéro, comme cela doit être.

Soit, en second lieu, $m = 9$: comme 9 est un carré, on devra trouver

$$-3\psi(0).$$

Or on aura à prendre

$$m' = 0, \quad d'' = 9, \quad \delta'' = 1,$$
$$m' = 0, \quad d'' = 3, \quad \delta'' = 3,$$
$$m' = 0, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 9,$$
$$m' = 1, \quad d'' = 5, \quad \delta'' = 1,$$
$$m' = 1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 5;$$
$$m' = -1, \quad d'' = 5, \quad \delta'' = 1,$$
$$m' = -1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 5.$$

d'où, pour le premier membre de l'équation (σ),

$$\psi(2) - \psi(0) + \psi(-2) - \psi(2) - \psi(0) - \psi(0) - \psi(-2);$$

et cela se réduit effectivement à $-3\psi(0)$.

En posant

$$f(x) = \tfrac{1}{2}[\psi(x) + \psi(-x)], \qquad F(x) = \tfrac{1}{2}[\psi(x) - \psi(-x)],$$

on a

$$\psi(x) = f(x) + F(x);$$

et il est clair que la fonction $f(x)$ sera paire, c'est-à-dire vérifiera l'équation

$$f(-x) = f(x),$$

tandis que $F(x)$ sera impaire, c'est-à-dire telle, que l'on aura

$$F(-x) = -F(x), \qquad F(0) = 0.$$

Aucune autre condition n'est d'ailleurs imposée aux fonctions $f(x)$ et $F(x)$, puisque la fonction $\psi(x)$ dont elles dérivent est absolument quelconque.

Puisque la fonction $\psi(x)$ est à volonté dans l'équation (σ), on peut substituer $f(x)$ à $\psi(x)$, et l'on a

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} f\left(m' + \frac{d''-\delta''}{4}\right) = (-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}}\sqrt{m}\,f(0), \text{ ou } = 0.$$

suivant que m est ou n'est pas un carré. En appliquant cette même équation à $F(x)$, on aura à cause de $F(0) = 0$ ce résultat plus simple :

$$\sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} F\left(m' + \frac{d''-\delta''}{4}\right) = 0.$$

L'équation générale (σ) n'est que la somme des deux équations particulières concernant une fonction paire $f(x)$ et une fonction impaire $F(x)$; mais il faut bien se garder de mettre ces deux équations sur le même rang. L'équation relative à $F(x)$ n'est qu'une identité presque

évidente, du genre de celles dont nous avons dit un mot à la fin de notre cinquième article. L'équation relative à $f(x)$ a seule du prix.

Cette équation où entre $f(x)$ n'a été donnée jusqu'ici que pour un nombre m de la forme $4\nu + 1$: la formule (σ) n'est vraie en effet que pour les nombres de cette forme, tant que $\psi(x)$ conserve sa généralité absolue. Mais il arrive que quand on réduit $\psi(x)$ à une fonction paire $f(x)$, la formule (σ) reste vraie et même est évidemment vraie (à en devenir presque insignifiante) pour les nombres de la forme $4\nu + 3$. Comme ces nombres ne sont jamais des carrés, le second membre de la formule citée est alors toujours zéro : or en effet au premier membre les deux termes qu'on obtient en permutant d'' et δ'' et en changeant m' de signe (quand m' n'est pas zéro) répondent à une même valeur de la fonction $\psi(x)$ ou $f(x)$ supposée paire, et ont des coefficients égaux et de signes contraires, parce que m étant de la forme $4\nu + 3$ et égal à $4m'^2 + d''\delta''$, il faut que d'' et δ'' soient d'espèce opposée relativement au module 4, c'est-à-dire que

$$(-1)^{\frac{d''-1}{2}} = -(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}.$$

Nous voyons donc que pour *tout nombre impair m* soumis au mode de partition marqué par l'égalité

$$m = 4m'^2 + d''\delta'',$$

où les entiers d'' et δ'' sont impairs et positifs, tandis que l'entier m' n'est assujetti à aucune condition, on a, en désignant par $f(x)$ une fonction paire quelconque :

$$(\tau)\quad \sum\sum(-1)^{m'+\frac{\delta''-1}{2}} f\left(m' + \frac{d''-\delta''}{4}\right) = (-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}}\sqrt{m}\,f(0), \text{ ou } = 0.$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Soit, par exemple, $m = 3$: on ne pourra prendre que

$$m' = 0,\quad d'' = 3,\quad \delta'' = 1,$$
$$m' = 0,\quad d'' = 1,\quad \delta'' = 3.$$

On aura donc pour le premier membre de l'équation (τ)

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right),$$

ce qui fait bien zéro, parce que la fonction $f(x)$ est paire.

Je ne m'étendrai pas davantage sur les formules (σ) et (τ) : peut-être ai-je donné déjà trop d'applications détaillées dans cet article; nous dédommagerons le lecteur par la marche rapide des articles suivants.

NOUVELLE THÉORIE
DES
FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

DEUXIÈME PARTIE.
DES PÉRIODES DES INTÉGRALES.
(Suite).

CHAPITRE IV.
De la cubature des surfaces imaginaires et des périodes des intégrales doubles.

38. *Cubature de la conjuguée dont les ordonnées z sont seules imaginaires.* — Les axes étant supposés rectangulaires, l'élément du volume droit compris entre le plan des xy et la surface que l'on veut cuber est

$$z dx\, dy$$

ou

$$F(x, y)\, dx.dy,$$

si l'équation de la surface a donné

$$z = F(x, y).$$

Ce volume droit indéfini est représenté par l'intégrale

$$\int dy \int F(x, y)\, dx;$$

pour le limiter, on se donne habituellement la trace horizontale, fermée, du cylindre qui doit en former le contour. Si cette trace est re-

présentée par une équation $f(x, y) = 0$ qui donne

$$x = \varphi(y) \pm \sqrt{\psi(y)},$$

le volume considéré est représenté par

$$(1) \qquad \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)-\sqrt{\psi(y)}}^{\varphi(y)+\sqrt{\psi(y)}} \mathrm{F}(x, y)\, dx,$$

y_0 et y_1 étant les ordonnées maxima et minima de la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

Si la trace horizontale du cylindre est sinueuse et que son équation fournisse plus de deux valeurs de x en y, le volume s'exprime par plusieurs intégrales doubles dont les limites, fonctions de y, sont les différentes valeurs de x prises deux à deux en ordre convenable, et les limites par rapport à y, les ordonnées maxima et minima des différentes branches de la courbe sinueuse.

Le cas qui se présente le plus fréquemment est celui où le cylindre, qui comprend le volume à cuber, projette sur le plan horizontal le contour apparent de la surface. Si ce contour est limité dans les deux sens des x et des y, on calcule, comme il vient d'être dit, le volume droit compris entre la surface entière et le plan horizontal.

Si le contour est illimité, par exemple, dans le sens des x positifs et limité dans le sens des x négatifs, on peut le terminer, dans le sens des x positifs par une parallèle $x = x_1$ à l'axe des y; alors $x = \chi(y)$ étant la valeur de x tirée de l'équation du contour apparent, le volume est représenté par

$$(2) \qquad \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\chi(y)}^{x_1} \mathrm{F}(x, y)\, dx,$$

y_0 et y_1 étant les ordonnées limites de la base du cylindre sur la droite $x = x_1$, ou par plusieurs intégrales de même forme avec d'autres de la forme (1) si la base du cylindre comprend plusieurs branches du contour apparent, et que ce contour présente des points maxima et minima par rapport à y.

Si le contour apparent est illimité dans les deux sens des x positifs et négatifs, on le termine par des parallèles à l'axe des y, $x = x_0$ et $x = x_1$ qui rencontrent le contour apparent et forment avec lui un espace clos sur le plan des xy; alors outre des intégrales de la forme (1) ou (2), l'expression du volume en comprend d'une troisième forme

$$(3) \qquad \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}(x, y)\, dx.$$

Si la surface n'a pas de contour apparent sur le plan horizontal, en ce sens que ses points projetés parallèlement à l'axe des z recouvrent tout le plan des xy, on peut former sur ce plan un contour rectangulaire au moyen de deux parallèles à l'axe des y, $x = x_0$, $x = x_1$, et de deux parallèles à l'axe des x, $y = y_0$, $y = y_1$, et le volume s'exprime par une intégrale de la forme (3).

Cela posé, la conjuguée à abscisses et ordonnées réelles se cubera exactement comme la surface réelle, car dx et dy étant réels et $\mathrm{F}(x, y)$ seul imaginaire, la partie réelle de l'intégrale

$$\int dy \int \mathrm{F}(x, y)\, dx$$

représentera le volume terminé à la surface diamétrale, correspondante aux cordes parallèles à l'axe des z, de la partie considérée, et la partie imaginaire le volume compris entre la surface diamétrale et la conjuguée.

Si l'on prenait dans le plan horizontal un contour fermé quelconque, partie placé au-dessous de la surface réelle, partie au-dessous de la surface imaginaire, l'intégrale, abstraction faite du signe $\sqrt{-1}$ qu'on remplacerait par 1, représenterait la somme des volumes cylindriques terminés à la surface réelle et à la surface imaginaire.

On peut trouver dans cette remarque le moyen de simplifier quelquefois le procédé de calcul habituellement employé pour cuber la surface réelle. En effet, une intégrale de la forme

$$(3) \qquad \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}(x, y)\, dx$$

est généralement plus aisée à obtenir que celles des deux autres

formes, parce que les limites x_0 et x_1 y sont constantes au lieu d'être des fonctions de y; cette intégrale donne un volume à base rectangulaire et non pas terminé au contour apparent de la surface, ce qui est habituellement ce dont on a besoin

Mais si ce contour rectangulaire dépasse le contour apparent de la surface réelle, l'intégrale représentera sous forme réelle le volume cylindrique compris entre la surface réelle et le plan horizontal, volume qui aura pour base tout ou portion du contour apparent, plus le volume de la surface diamétrale compris dans l'intérieur d'un cylindre limité au contour apparent de la surface réelle et au contour rectangulaire, et sous forme imaginaire, le volume compris dans ce même cylindre entre la surface diamétrale et la surface imaginaire.

Or, si la surface diamétrale est précisément le plan des xy, son volume sera nul, et l'intégrale ne se composera plus que de deux parties, l'une réelle qui sera ce que l'on cherchait, et l'autre imaginaire qui se séparera aisément.

Si la surface diamétrale était quelconque, il faudrait la cuber à part, et cela ramènerait en général la difficulté qu'on voulait éviter; cependant, quand il s'agira de trouver le volume compris entre les deux nappes de la surface réelle, que sépare le plan diamétral qu'elle a en commun avec sa conjuguée, ce volume devant s'obtenir par une soustraction, où le volume de la surface diamétrale disparaîtrait comme partie commune, rien ne s'opposera plus à la réussite de l'artifice que nous signalons.

Pour calculer le volume compris entre le plan des xy et une conjuguée quelconque, on pourrait rendre d'abord ses abscisses et ses ordonnées réelles, en changeant la direction de l'axe des z; mais nous allons voir qu'il est représenté par la même intégrale double qui donne le volume de la surface réelle, à la différence près toutefois d'une intégrale simple qui formera une partie complémentaire analogue à celle qu'introduit la recherche de l'aire d'une conjuguée quelconque d'une courbe plane.

59. *Cubature d'une quelconque des conjuguées dont les ordonnées z et x seules sont imaginaires.* — Les ordonnées z et x de la conjuguée considérée étant seules imaginaires, pour rendre réelles ses abscisses,

il suffira d'incliner convenablement l'axe des z dans le plan des zx: en d'autres termes, les cordes réelles de la conjuguée seront parallèles au plan des zx.

Cela posé, la question peut, sans inconvénient, être réduite à déterminer le volume compris entre la conjuguée considérée, un cylindre parallèle à ses cordes réelles et le plan des xy : si l'on voulait ensuite donner aux génératrices du cylindre une autre direction, sans changer la courbe suivant laquelle il devrait couper la conjuguée, la correction à faire se réduirait à l'introduction d'une intégrale simple qui exprimât la différence des volumes des deux cylindres.

La question ainsi posée n'exige aucune invention nouvelle; chaque plan parallèle aux xz donne dans le cylindre considéré une section trapézoïdale dont l'aire, les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires, est exprimée (n° 22) par

$$\frac{z_0^2 - z_1^2}{2C} + \int_{x_0 z_0}^{x_1 z_1} F(x, y)\, dx,$$

$[x_0\, z_0]$, $[x_1, z_1]$ étant les deux points où le plan parallèle aux xz, dont il s'agit, coupe l'intersection de la conjuguée et du cylindre, et l'intégrale étant prise comme si y était constant.

Le volume compris dans le cylindre entre deux plans parallèles aux xz, infiniment voisins, est donc

$$dy\left(\frac{z_0^2 - z_1^2}{2C} + \int_{x_0 z_0}^{x_1 z_1} F(x, y)\, dx\right),$$

et le volume cherché, si $y = y_0$ et $y = y_1$ sont les deux plans limites qui comprennent le cylindre, est représenté par

$$\int_{y_0}^{y_1} dy\left(\frac{z_0^2 - z_1^2}{2C} + \int_{x_0 z_0}^{x_1 z_1} F(x, y)\, dx\right),$$

expression qui ne diffère que par une intégrale simple de la formule du volume indéfini de la surface réelle.

Dans cette expression, la partie réelle représente le volume compris dans le cylindre considéré entre le plan des xy et le diamètre qui

partage en parties égales les cordes réelles de la conjuguée, et la partie imaginaire, le volume compris dans le même cylindre entre la conjuguée et son diamètre.

Si le cylindre est circonscrit à la surface réelle, l'intégrale simple

$$\int_{y_0}^{y_1} dy\left(\frac{z_0^2 - z_1^2}{2C}\right)$$

représente le volume compris entre ce cylindre et un autre qui, coupant la surface réelle suivant la même courbe, aurait ses génératrices parallèles aux z; en supprimant donc cette intégrale simple, l'intégrale double qui reste

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0 z_0}^{x_1 z_1} \mathrm{F}(x, y)\, dx$$

représente le volume de la conjuguée compris dans un cylindre parallèle aux z.

40. *Cubature d'une conjuguée quelconque.* — C et C′ étant les deux caractéristiques de la conjuguée considérée, c'est-à-dire les rapports des parties imaginaires des coordonnées x et z, y et z d'un quelconque de ses points, ses cordes réelles seront parallèles à la droite

$$x = Cz,$$
$$y = C'z;$$

pour trouver l'expression du volume compris entre une portion de cette surface, un cylindre parallèle à ses cordes réelles et le plan des xy, nous raisonnerons comme en géométrie plane.

S'il s'agissait de la surface réelle, et que la rapportant successivement aux axes primitifs (x, y, z) et à de nouveaux axes (x, y, z') dont le dernier fût parallèle à la droite anciennement représentée par les équations $x = Cz$, $y = C'z$, on formât les deux intégrales

$$\int dy \int z dx \quad \text{et} \quad \sin(\mathrm{Y}, \mathrm{Z'X}) \int dy' \left(\sin \mathrm{Z'X} \int z' dx'\right)$$

en prenant pour limites les coordonnées, dans l'ancien et le nouveau système, des points d'une même courbe tracée sur la surface : ces deux

intégrales différeraient entre elles de l'intégrale simple qui exprimerait la différence des volumes des deux cylindres parallèles l'un aux z, l'autre aux z', terminés d'une part à la courbe choisie et de l'autre au plan des xy.

Cette intégrale simple, en désignant par u une ordonnée perpendiculaire à la fois aux z et aux z', est

$$\frac{\sin ZZ'}{2}\int z.z'.du$$

qu'on peut exprimer en fonction de z, x et y de la manière suivante : D'abord $z' = \frac{z}{\cos ZZ'}$, ce qui réduit l'intégrale considérée à

$$\frac{\operatorname{tang} ZZ'}{2}\int z^2\, du;$$

en outre les plans parallèles aux z' et aux z, puisque les z' sont parallèles à la droite

$$x = Cz,$$
$$y = C'z,$$

ont pour équation générale

$$Cy - C'x = k,$$

la distance u d'un point x, y, z à l'un de ces plans est donc

$$\frac{Cy - C'x - k}{\sqrt{C^2 + C'^2}},$$

par conséquent

$$du = \frac{C\,dy - C'\,dx}{\sqrt{C^2 + C'^2}};$$

d'un autre côté

$$\cos ZZ' = \frac{1}{\sqrt{C^2 + C'^2 + 1}},$$

et par suite

$$\operatorname{tang} ZZ' = \sqrt{C^2 + C'^2}$$

La substitution donne pour la partie complémentaire cherchée

$$\frac{1}{2}\int z^2(C\,dy - C'\,dx),$$

expression dans laquelle x, y, z sont les coordonnées des points de la courbe qui limite la portion de volume qu'on voulait calculer, de sorte que dx et dy peuvent y être exprimés en fonction de z et de dz au moyen de l'équation de la surface et de la condition qu'on y a adjointe pour définir la courbe en question.

En résumé donc, s'il s'agissait de la surface réelle, on aurait identiquement

$$\sin(Y, Z'X)\sin(Z'X)\int dy'\int z'\,dx' = \int dy\int z\,dx - \frac{1}{2}\int z^2(C\,dy - C'\,dx),$$

xyz, $x'\,y'\,z'$ désignant dans les deux intégrales doubles les coordonnées anciennes et nouvelles des points correspondants de la surface, tandis que dans l'intégrale simple x, y, z seraient les coordonnées des points de la courbe tracée sur la surface pour limiter la portion à laquelle correspondraient les deux volumes considérés.

Or cette identité, absolue de sa nature, convient aussi bien à des valeurs imaginaires des coordonnées qu'à des valeurs réelles; si donc,

$$z = F(x, y)$$

étant toujours l'équation de la surface réelle.

$$x - Cz = f(y - C'z)$$

est l'équation du cylindre réel qui doit, dans la conjuguée dont les caractéristiques sont C et C', intercepter le volume considéré, et que les équations

$$z = F(x, y) \quad \text{et} \quad x - Cz = f(y - C'z)$$

donnent

$$x = \varphi(y) \pm \psi(y),$$

le volume cherché, représenté par l'intégrale

$$\sin(Y, Z'X)\sin Z'X\int dy'\int z'\,dx'$$

où les limites, qu'il est inutile d'indiquer, auraient été prises convenablement, sera aussi représenté par

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)-\psi(y)}^{\varphi(y)+\psi(y)} F(x, y)\, dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1} \{F[\varphi(y) \pm \psi(y), y]\}^2 [C - C'\varphi'(y) \mp C'\psi'(y)]\, dy,$$

dans laquelle les constantes y_0 et y_1 seraient les ordonnées maxima et minima de la courbe qui limite sur la conjuguée la portion de la surface à laquelle correspond le volume cherché.

41. *Des intégrales doubles prises entre des limites imaginaires.* — La définition d'une intégrale double $\int\int z\,dx\,dy$, lorsque les variables dont elle dépend doivent passer par des valeurs imaginaires, est sujette à des difficultés sur lesquelles nous devons insister avant de passer outre.

Il est évident d'abord qu'une des sommes représentées dans la formule

$$\int\int z.dx.dy$$

ne se sépare des autres qu'autant qu'on fournit deux relations entre les parties réelles et imaginaires de x, y et z, qui, jointes aux deux équations dans lesquelles se décompose celle qui donne z implicitement, réduisent à deux le nombre des variables indépendantes.

Mais ces deux relations étant données, pour concevoir nettement l'intégrale double, il faudrait la transformer de manière à pouvoir y séparer les deux intégrations.

Or une pareille transformation exigerait habituellement un changement de variables indépendantes.

En effet, à un même couple de valeurs attribuées aux parties réelle et imaginaire soit de y, soit de x, il ne correspondra en général qu'un nombre limité de systèmes de valeurs soit de x et de z, soit de y et

de z, puisque sur les six variables on en aura choisi deux et qu'il restera aux quatre autres à satisfaire à quatre conditions.

Pour pouvoir séparer les deux intégrations, il faudrait en général substituer des variables réelles aux variables imaginaires considérées.

On pourrait prendre pour variables indépendantes les parties α et β qui composent x, et l'on effectuerait la transformation au moyen de la formule connue

$$\int\int z\,dx\,dy = \int\int z_1\,d\alpha\,d\beta\,\frac{1}{\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}},$$

z_1 désignant l'expression de z en fonction de α et de β et $\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dy}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{d\beta}{dy}$ les dérivées partielles de α et de β par rapport à x et à y.

Mais une pareille transformation habituellement altérerait trop profondément la forme analytique de la fonction placée sous le signe $\int$ pour laisser aucun moyen d'en étudier l'intégrale.

La valeur d'une intégrale double, comme celle d'une intégrale simple, dépend avant tout, la fonction sous le signe $\int$ restant la même, des limites entre lesquelles l'intégration doit être faite. Ces limites restant fixes, la suite des valeurs intermédiaires, qu'on doit faire prendre aux variables, peut se déformer d'une infinité de manières sans que la valeur de l'intégrale change, et cette valeur, lorsqu'elle doit changer, conserve encore intacte sa partie principale, elle ne s'augmente que de constantes ou d'intégrales simples.

Nous bornerons donc d'abord nos recherches à déterminer pour chaque système de limites la valeur de l'intégrale double la plus facile à rencontrer et à définir.

Les limites seront fournies par deux courbes réelles ou imaginaires composées de points pris sur la surface $F(x, y, z) = 0$ ou sur ses conjuguées, de sorte que la discussion portera sur les différentes hypothèses qu'on peut faire relativement à ces courbes.

42. *Du cas où y ne reçoit que des valeurs réelles.* — Lorsque les

deux courbes, qui forment les limites de l'intégrale, ont les ordonnées de tous leurs points réelles, on peut éviter de faire passer y par des valeurs imaginaires; alors l'intégrale double reçoit immédiatement la forme

$$\int dy \int z dx.$$

Mais les limites dechaque intégration étant fixées, si l'on n'indiquait de quelle manière pour chaque valeur de y, x variera entre ses limites $\varphi(y)$ et $\psi(y)$, l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx$$

resterait en général complétement indéterminée. En effet, pour chaque valeur de y, $y = k$,

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx,$$

pourrait avoir une infinité de valeurs qui seraient une quantité fixe augmentée de multiples entiers de quantités représentant les aires des anneaux fermés de la courbe

$$f(x, k, z) = 0,$$

ou les aires imaginaires des conjuguées fermées de cette courbe; en sorte que si la nature de la question ne spécifiait rien sur le nombre de chacune des périodes qu'il faudrait comprendre dans la valeur de l'intégrale

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx,$$

pour chaque valeur de y, l'élément

$$dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx,$$

renfermant une partie dans laquelle un coefficient, entier à la vérité,

serait quelconque, comme cette partie serait toujours infiniment petite, l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx$$

pourrait recevoir une infinité de valeurs continues entre elles : tandis que si, au contraire, la marche des valeurs de x est fixée d'une maniere générale, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de y, alors les valeurs de l'intégrale

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx,$$

ne se formeront plus indépendamment les unes des autres, et l'intégrale double sera complétement définie.

Pour fixer la marche des valeurs de x entre ses limites correspondantes à chaque valeur de y, on pourra définir d'une manière générale la courbe réelle ou imaginaire que, dans chaque plan parallèle au plan des xz, et distant de ce plan de la quantité y, le point $[xz]$ devra décrire entre les limites $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, pour engendrer l'aire

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx.$$

Soit toujours $y = k$ une des valeurs de y, le plan $y = k$ coupera la surface réelle et celles de ses conjuguées dont les ordonnées y sont réelles, suivant une courbe réelle et ses conjuguées imaginaires.

Si $x_0 = \varphi(k)$ et $x_1 = \psi(k)$ sont constamment réels, quel que soit k, on pourra ne donner à x que des valeurs réelles, et l'intégrale

$$\int_{\varphi(k)}^{\psi(k)} z dx$$

représentera la somme des aires des sections faites dans la surface réelle et dans sa conjuguee à abscisses et ordonnées réelles, comprises entre ces deux courbes, l'axe des x et les deux parallèles à l'axe des z,

$$x = \varphi(k), \quad x = \psi(k).$$

Mais cette intégrale aura d'ailleurs autant de valeurs qu'il y aura de chemins continus sur ces deux courbes, des divers points qui peuvent répondre à la limite inférieure $x_0 = \varphi(k)$, aux points qui peuvent répondre à la limite supérieure $x_1 = \psi(k)$.

Si x peut aller de $x_0 = \varphi(k)$ à $x_1 = \psi(k)$ en dépassant ces limites dans un sens ou dans l'autre de toutes les manières possibles, pourvu que, partant de $x_0 = \varphi(k)$, il arrive par des valeurs réelles à $x_1 = \psi(k)$, l'intégrale devra être complétée par l'addition de multiples entiers des aires des anneaux fermés de la section réelle ou de la section imaginaire à abscisses réelles.

L'intégrale

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} z dx$$

représentera donc la somme des volumes compris entre la surface réelle et sa conjuguée à abscisses et ordonnées réelles, le plan des xy, les deux plans $y = y_0$, $y = y_1$ et les deux cylindres $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$.

Et si dans chaque plan $y = k$, le point $[xz]$ a décrit des anneaux fermés homologues et un même nombre de fois dans chaque plan, l'intégrale comprendra en outre des multiples des volumes engendrés par les différents anneaux fermés lorsqu'ils se déplacent parallèlement au plan des xz entre les plans $y = y_0$, $y = y_1$.

Si $x_0 = \varphi(k)$ et $x_1 = \psi(k)$ étant toujours supposés réels, quel que soit k, on veut néanmoins faire passer x par des valeurs imaginaires, on pourra interrompre à un instant quelconque le chemin du point $[xz]$, sur l'arc de la courbe réelle, par un tour fait sur une de ses conjuguées fermées, de façon à continuer ensuite l'arc réel, ou si cet arc réel se compose de deux branches distinctes et séparées, passer de l'une à l'autre en suivant l'une quelconque des conjuguées, au lieu de prendre, comme précédemment, la conjuguée à abscisses réelles.

L'intégrale aura, dans tous les cas, exactement les mêmes valeurs, car les aires imaginaires des conjuguées fermées contenues dans un même plan seront égales, et par conséquent engendreront les mêmes volumes.

Enfin, on pourra passer dans le plan de chaque section, du point $x_0 = \varphi(k)$ au point $x_1 = \psi(k)$, par une succession de valeurs imaginaires de x réglée par une loi entièrement arbitraire, par une relation choisie à volonté entre les parties réelles et imaginaires de x et de z, cette relation n'étant assujettie qu'à la condition d'être satisfaite par

$$x_0 = \varphi(k), \quad z_0 = F(x_0, k)$$

et par

$$x_1 = \psi(k), \quad z_1 = F(x_1, k),$$

quel que soit k.

Alors l'intégrale

$$\int_{\varphi(k)}^{\psi(k)} z dx$$

représentera l'aire de la section faite dans la surface réelle et sa conjuguée à abscisses et ordonnées réelles, par exemple, plus des multiples déterminés des aires des différents anneaux fermés de la section réelle ou de l'une de ses conjuguées imaginaires. Le chiffre de chacun de ces multiples se déterminera, comme on l'a vu dans la théorie des intégrales simples, par le nombre de tours que fera sur l'anneau réel le point de contact de cet anneau avec la conjuguée sur laquelle se trouvera à chaque instant le point $[xz]$, ou par le nombre de contacts du chemin qu'aura décrit ce point $[xz]$ avec les branches réelles qui touchent chaque anneau fermé de l'une des conjuguées imaginaires.

Il pourrait se faire que k variant, le nombre de ces tours ou contacts ne dût pas rester le même dans les plans de toutes les sections, on devrait alors déterminer les valeurs de k entre lesquelles ces nombres resteraient constants; l'intégrale se composerait de multiples différents des volumes engendrés par les anneaux fermés dans les intervalles des plans correspondants aux valeurs principales de k.

Le nombre de tours que fait sur l'anneau réel le point où il touche la conjuguée à laquelle appartient le point $[xz]$, est égal au nombre de fois que le coefficient caractéristique de ce point $[xz]$ revient à sa

valeur initiale, l'angle dont il est la tangente ayant passé par toutes les valeurs possibles dans un intervalle de 360 degrés.

Quant aux contacts du chemin imaginaire, parcouru par le point $[xz]$, avec la section réelle dans chaque plan, comme ils se déterminent, ainsi qu'on l'a vu dans la théorie des intégrales simples, par les rencontres de cette courbe réelle avec une autre courbe réelle dont l'équation résulte de la condition qui règle la succession des valeurs de x : il est évident que les valeurs de k, pour lesquelles cette seconde courbe serait tangente à la section réelle, seront celles à partir desquelles le nombre des contacts du chemin imaginaire pourra changer.

Si $x_0 = \varphi(k)$ et $x_1 = \psi(k)$ n'étaient pas constamment réels, les limites de l'intégrale

$$\int_{x_0,\, z_0}^{x_1,\, z_1} z dx$$

seraient prises, en général, sur deux conjuguées différentes de la section réelle contenue dans le plan $y = k$, et cette intégrale, à la différence près de la quantité $\frac{z_0^2}{2C_0} - \frac{z_1^2}{2C_1}$, représenterait la somme des aires des deux conjuguées passant par les limites, et de la courbe réelle terminée aux points où elle toucherait ces deux conjuguées; l'intégrale double, à la différence près de la quantité

$$\frac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1} dy \left(\frac{z^2}{C}\right)_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)},$$

représenterait donc le volume compris entre le plan des xy, la surface formée par les sections parallèles au plan des xz soit de la surface réelle, soit de ses conjuguées à ordonnées réelles qui passeraient par tous les points $y = k$, $x = \varphi(k)$ ou $\psi(k)$, $z = F(x, y)$, et un conoïde ayant pour génératrices les parallèles menées de ces divers points aux cordes réelles des conjuguées qui y passeraient.

45. *Du cas où les parties imaginaires de x et de y restent dans un rapport constant.* — Lorsque les deux courbes, qui forment les limites de l'intégrale double, sont sur une même conjuguée, ou sur des con-

juguées différentes, mais dont les caractéristiques soient proportionnelles, ou, enfin, quand ces deux courbes se composent de points pris sur les conjuguées dont les deux caractéristiques sont comme des nombres donnés, on peut éviter de faire sortir le point $[xyz]$ de ces conjuguées.

Ce cas peut se ramener au précédent par une transformation de coordonnées.

En faisant tourner le plan des xz d'un angle convenable, autour de l'axe des z, on substituera à la suite des valeurs que devaient prendre x, y et z, une autre suite de valeurs d'autres variables x', y', z', desquelles y' restera constamment réelle, et les valeurs de la nouvelle intégrale double

$$\sin YX' \int dy' \int z' dx',$$

fourniront celles de la proposée. Or le paragraphe précédent les définit complétement.

44. *Du cas où chacune des limites est tout entière sur une même conjuguée, les deux conjuguées qui les contiennent étant d'ailleurs quelconques.* — On peut supposer, dans ce cas, que le point $[xyz]$ trace des courbes définies sur les conjuguées comprises dans une même suite dont fassent partie celles sur lesquelles se trouvent les limites : on ne pourra plus alors rendre en même temps réelles toutes les valeurs de y, par une même transformation de coordonnées; mais cependant on arrivera encore aisément à déterminer l'un des volumes que peut représenter, dans ce cas, l'intégrale double.

En effet, il résulte de ce qui précède, que l'une des valeurs de l'intégrale, prise entre des limites déterminées par une courbe A, tracée sur la surface réelle, et une courbe B, tracée sur l'une de ses conjuguées, représente, à la différence près d'une intégrale simple qui s'introduit par le changement de direction de l'axe des z, le volume de la surface réelle limitée à la courbe A et à la courbe C, suivant laquelle elle touche la conjuguée à laquelle appartient la courbe B, plus le volume de cette conjuguée limitée aux courbes C et B.

L'intégrale double, lorsque la courbe B passe d'une conjuguée à une autre, peut donc être considérée comme s'augmentant du volume correspondant à la portion de la surface réelle comprise entre les deux courbes suivant lesquelles elle touche les deux conjuguées consécutives, de la différence des volumes des deux conjuguées limitées respectivement aux courbes suivant lesquelles elles touchent la surface réelle, et à la courbe mobile B, et enfin de la quantité dont varie l'intégrale simple complémentaire.

Cela revient à dire que l'intégrale double définie par ses limites correspondantes à deux courbes B et B′, tracées sur deux conjuguées différentes et quelconques d'ailleurs, comprend parmi ses valeurs le volume de la conjuguée à laquelle appartient la courbe B, limitée à cette courbe et à la courbe C, suivant laquelle elle touche la surface réelle, plus le volume correspondant à la portion de la surface réelle comprise entre la courbe C et la courbe C′, suivant laquelle elle touche la conjuguée à laquelle appartient la courbe B′, plus le volume de cette dernière conjuguée limitée aux courbes C′ et B′, ces trois volumes étant compris dans trois cylindres parallèles à trois axes de z différents, mais dont les directions sont connues, plus enfin les parties complémentaires qui s'introduisent à chaque changement de direction de l'axe des z, parties que nous avons déjà plusieurs fois évaluées.

45. *Du cas où, en tous les points d'une même limite, les deux caractéristiques conservent entre elles un rapport constant ; ce rapport n'étant pas toutefois le même aux deux limites.* — A et B étant les deux courbes limites, nous supposerons d'abord l'une d'elles A tracée sur la surface réelle.

Si nous commençons par faire tourner les axes des x et des y d'un angle tel, que les ordonnées de tous les points de la courbe B deviennent réelles, et que nous concevions ensuite dans chaque plan parallèle au nouveau plan des xz, et passant par un point de la courbe B, les sections faites dans la surface réelle et dans la conjuguée imaginaire à laquelle ce point appartient, ces deux sections tangentes entre elles se faisant suite l'une à l'autre, couperont aux points $x' = a$, $x' = b$,

les courbes A et B,

$$dy' \int_a^b z'\,dx'$$

représentera la somme de leurs aires, à la différence près de la quantité algébrique

$$\left[\frac{(z')^2}{2C'}\right]_{x'=a}^{x'=b};$$

l'intégrale

$$\int dy' \int_{\varphi(y')}^{\psi(y')} z'\,dx',$$

dans laquelle $\varphi(y')$ et $\psi(y')$ seraient les valeurs générales de x' en y' pour tous les points de la courbe A et de la courbe B, représentera donc le volume de la surface réelle limitée à la courbe A et à la courbe D, suivant laquelle elle touche toutes les sections faites dans les conjuguées auxquelles appartiennent les points de la courbe B, plus le volume d'une surface imaginaire engendrée par ces sections, limitées à la surface réelle et à la courbe B, plus l'intégrale simple

$$\int dy' \left[\frac{(z')^2}{2C'}\right]_{x'=\varphi(y')}^{x'=\psi(y')}.$$

Si les deux limites A et B étaient imaginaires, on évaluerait séparément l'intégrale entre les courbes A, B et des courbes différentes D, E tracées sur la surface réelle, et on y joindrait l'intégrale prise entre les courbes D et E.

46. Le dernier cas qui resterait à examiner serait celui où les deux limites seraient composées de points entièrement quelconques. Mais nous ne saurions traiter la question dans cette hypothèse générale qui exigerait absolument un changement complet de variables indépendantes. Comme nous l'avons dit déjà, la nouvelle intégrale différerait alors trop profondément de la proposée pour qu'on dût regarder la question comme se rapportant à cette proposée. On étudierait donc l'intégrale transformée dont les variables seraient devenues réelles, comme nous l'avons dit au n° **42**.

47. Toutes les conjuguées d'une surface ne la touchent pas toujours; nous devons donc dire un mot du cas où les limites passeraient sur les conjuguées de la seconde espèce.

La cubature de ces conjuguées ne présente rien de particulier, et inversement l'interprétation de l'intégrale double, dans le cas où les limites appartiendraient à une même conjuguée continue entre ces limites, ne présenterait non plus aucune difficulté. Mais dans tous les autres cas la question offrirait les mêmes embarras que nous avons constatés en géométrie plane dans le cas analogue.

Toutefois nous devons faire remarquer que dans toutes les hypothèses que nous avons examinées relativement aux limites, en exceptant seulement le cas où ces limites seraient composées de points complétement isolés, la transformation que nous avons eu à faire nous a toujours fourni, pour définir les nouvelles variables, une nouvelle équation de la même surface réelle, ayant encore par conséquent tous ses coefficients réels; or les ordonnées y étant devenues réelles à la suite de cette transformation, la section faite par chaque plan parallèle au nouveau plan des xz, dans la conjuguée passant par un point d'une des limites et l'enveloppe imaginaire des autres sections de la surface complète par le même plan réel, comporteront toujours les mêmes observations que nous avons faites en géométrie plane dans le cas analogue.

Par suite, lorsque l'équation proposée aura ses coefficients réels et représentera une surface réelle, on pourra habituellement assigner encore le volume représenté par l'intégrale double, même dans le cas ou les limites auraient passé sur les conjuguées qui ne touchent pas la surface réelle.

48. *Des périodes des intégrales doubles.* — Nous avons, dans ce qui précède, trouvé l'un des volumes, et, suivant toute apparence, le volume le plus simplement défini que pût représenter pour chaque système de limites l'intégrale double

$$\int\int z.dx.dy.$$

Mais alors même que les limites resteraient les mêmes, nous savons

que la valeur de l'intégrale pourrait changer avec la loi qui réglerait le mouvement du point $[xyz]$: nous allons donc chercher quelle sera cette valeur dans chaque cas. Ce qu'il restait encore de vague dans la recherche de la vraie valeur d'une intégrale double va s'éclaircir de façon à permettre de traiter complétement la question lorsqu'elle sera posée sur un exemple particulier.

Nous allons montrer en effet que les intégrales doubles comme les intégrales simples ont des périodes constantes, et que ce qu'il faut ajouter à la valeur la plus simple d'une intégrale double pour former sa vraie valeur actuelle est une somme de multiples de ces périodes réelles ou imaginaires; nous chercherons ensuite à obtenir un moyen de trouver ces multiples.

Le volume compris dans l'intérieur d'une nappe, fermée de toutes parts, de la surface réelle, peut être engendré plusieurs fois de suite dans le même sens, et ses éléments peuvent se superposer pendant que l'intégrale se forme; ce volume, on le comprend donc à l'avance, doit former une période réelle de l'intégrale; quant aux périodes imaginaires, ce seront les volumes enfermés par les conjuguées fermées.

49. *Démonstration de l'égalité des volumes enveloppés par toutes les conjuguées fermées d'une même catégorie.* — Nous démontrerons d'abord que les conjuguées fermées d'une même surface, comprises entre les mêmes nappes de cette surface, enveloppent toutes un même volume dans leur intérieur.

Il suffira pour cela de comparer entre elles les conjuguées qui ont en même temps leurs ordonnées y réelles ou de comparer l'une d'elles à celle qui a ses ordonnées et ses abscisses réelles; car en changeant la direction de l'axe des x, on pourrait amener successivement toutes les autres à avoir leurs ordonnées y réelles, et, d'un autre côté, celle qui primitivement avait à la fois ses abscisses et ses ordonnées réelles se retrouverait toujours comprise dans chaque nouveau groupe.

Cela posé, l'aire de la section faite dans l'une des conjuguées, qui ont leurs ordonnées réelles, par un plan parallèle au plan des xz est la période imaginaire ω de l'intégrale $\int z dx$ calculée en supposant y

constant, le segment compris entre deux plans parallèles au plan des xz est donc $\int \omega dy$, qui a la même valeur quelle que soit la conjuguée dont il s'agisse.

Il reste donc seulement à établir que toutes ces conjuguées ont les mêmes limites, parallèlement au plan des xz.

Or cela est évident : elles touchent en effet toutes la surface réelle aux points où elle a son plan tangent parallèle aux xz.

50. *De la manière dont s'accroît l'intégrale double.* — Quelle que fût la loi qui dût régir le mouvement du point $[xyz]$, nous avons toujours pu regarder la portion de surface qu'il décrit et à laquelle correspond le volume qui forme la valeur de l'intégrale double (à la différence près de l'intégrale simple qu'introduit le changement de direction dans l'axe des z), comme engendrée par une courbe B tracée sur la surface réelle, sur une de ses conjuguées, permanente ou non, ou sur des conjuguées pour lesquelles le rapport des caractéristiques C et C′ restât le même, ce rapport pouvant d'ailleurs changer ou non avec la position de la courbe B.

Dans le dernier cas, qui est le plus général, si la courbe B se déplace infiniment peu, l'intégrale subit trois variations distinctes.

1°. Si par chaque point de la courbe B, on fait, dans la conjuguée à laquelle appartient ce point, une section parallèle à la direction qu'il faudrait donner aux xz pour rendre réelles les ordonnées de la courbe B, ces sections forment une nappe N tangente à la surface réelle suivant une courbe A : lorsque la courbe B se déplace, la courbe A se déplace aussi sur la surface réelle, et l'intégrale s'accroît d'abord du volume correspondant à la portion de la surface réelle parcourue par la courbe A.

2°. La nappe N prend des limites différentes, et si l'on mène par chaque point de la courbe B et par le point correspondant de la courbe A deux parallèles aux cordes réelles de la conjuguée qui passe au point considéré de B, la nappe N, le plan des xy et les deux conoïdes formés par les deux suites de droites qui viennent d'être définies, enveloppent un certain volume : ce volume varie quand la

courbe B se déplace, et la variation qu'il subit est la seconde partie de l'accroissement de l'intégrale.

3°. Enfin si l'on a formé l'expression du volume compris entre le plan des xy, le cylindre parallèle aux z ayant pour directrice la courbe B et le conoïde, défini comme il vient de l'être, ayant la même directrice B, ce volume ayant été représenté par la même intégrale simple qui le fournirait réel : la variation de cette intégrale simple sera la troisième partie de l'accroissement de l'intégrale double.

51. *De la manière dont s'engendrent les périodes.* — Lorsque la courbe B se déplace, la courbe A, si elle se trouve sur une nappe fermée de la surface réelle, peut parcourir cette nappe plusieurs fois dans le même sens, et chaque fois qu'un tour entier se trouve achevé, l'intégrale comprend une fois de plus le volume réel enfermé par cette nappe. C'est ainsi que s'engendrent les périodes réelles.

Si la courbe B reste sur une nappe illimitée, la partie imaginaire de l'intégrale croît ou décroît suivant que cette courbe B s'éloigne ou se rapproche de la surface réelle; elle peut diminuer jusqu'à zéro ou croître sans limite, mais le volume formé ne peut être engendré deux fois, si l'on écarte le cas où la courbe B étant fermée, on supposerait qu'elle fût parcourue plusieurs fois dans le même sens par le point mobile.

D'un autre côté, lorsque la courbe B reprend la même position, l'intégrale simple complémentaire reprend la même valeur, sans ambiguïté, et son accroissement total se réduit à zéro.

Rien, dans l'hypothèse, ne permet donc alors aux périodes de se développer.

Mais si la courbe B parcourt une conjuguée fermée, ou si, en avançant, elle passe d'une conjuguée fermée à une autre voisine, ou si ses différents points restent sur des conjuguées fermées d'une même catégorie: cette courbe peut deux, ou trois, ou quatre fois parcourir dans le même sens une conjuguée fermée, ou en parcourir les portions équivalentes sur les conjuguées fermées sur lesquelles elle arrive successivement, ou sur lesquelles se transportent ses différents points; et, dans ce cas, la valeur de l'intégrale peut comprendre un nombre

quelconque de fois le volume intérieur commun des conjuguées considérées.

52 *Détermination du nombre de chacune des périodes que doit comprendre l'intégrale.* — Il est évident que nous ne saurions prétendre à donner une formule de ce nombre; il s'agit seulement d'indiquer un caractère auquel on puisse reconnaître que la période est achevée.

Nous n'avons rien à ajouter à ce qui a été dit précédemment des périodes réelles, dont la théorie est plus simple, et auxquelles d'ailleurs s'appliquera ce que nous avons à dire des périodes imaginaires.

La période imaginaire peut se clore de plusieurs manières différentes : la partie imaginaire de l'intégrale, qui s'accroît à mesure que la courbe B s'éloigne de la surface réelle, atteint la valeur du demi-volume intérieur de l'une des conjuguées fermées, au moment où cette courbe, se réduisant à un point, a parcouru dans son entier l'un des hémisphères de la conjuguée, séparés par la surface diamétrale qu'elle a en commun avec la surface réelle.

A partir de l'instant où se serait passé le fait que nous supposons, en général, la courbe B en reprenant des dimensions finies, retrancherait une partie du volume imaginaire déjà engendré, la demi-période achevée se perdrait petit à petit, et la partie imaginaire de l'intégrale pourrait redevenir nulle au moment où la courbe B repasserait sur la surface réelle.

Mais la demi-période achevée pourra se conserver lorsque le point, où se réduit la courbe B, se trouvera sur la limite commune des deux hémisphères, parce que la courbe B, en reprenant des dimensions finies, pourra se transporter de l'un sur l'autre hémisphère.

Alors les parties équivalentes des deux hémisphères étant parcourues successivement par la courbe B toujours dans le même ordre, chaque demi-période achevée s'ajoutera aux précédentes, et la partie imaginaire de l'intégrale pourra atteindre à un multiple quelconque du volume intérieur de la conjuguée.

D'autres circonstances peuvent donner lieu à l'accumulation des périodes : ainsi, si la courbe B, tournant comme autour d'un axe fixe, toujours dans le même sens, décrivait une même conjuguée, chaque

fois qu'elle viendrait se confondre avec la courbe de contact de la conjuguée avec la surface réelle, il faudrait compter une période de plus.

Dans le cas où la courbe B, toujours animée du même mouvement, aurait tous ses points consécutifs sur des conjuguées contigües, chaque fois qu'elle viendrait se confondre avec une ligne réelle, il faudrait compter une période de plus.

Enfin, si tous les points de la courbe B ne passaient pas simultanément sur la surface réelle, quand cependant ils y auraient tous passé, il faudrait compter une période de plus.

SUR

L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU $n^{ième}$ DEGRÉ A DEUX VARIABLES DANS LAQUELLE ON FAIT VARIER UN DES COEFFICIENTS;

PAR M. WOEPCKE.

I.

Soit

$$(1) \qquad C_n = 0$$

l'équation d'une courbe du $n^{ième}$ degré renfermant $\frac{n(n+3)}{2}$ coefficients, et soit $cx^\mu y^\nu$, où $\mu+\nu \overline{\overline{<}} n$, un des termes de cette équation, c étant une quantité variable, tandis que tous les autres coefficients de l'équation (1) sont des quantités données.

Parmi toutes ces courbes C_n fixons-en une

$$(2) \qquad C'_n = 0,$$

où l'on a donné à c une valeur déterminée k, de sorte que C'_n est une fonction parfaitement déterminée.

Nous pourrons considérer c comme composé de k et d'une partie variable γ, et nous aurons

$$(3) \qquad C_n = C'_n + \gamma x^\mu y^\nu.$$

Cette équation montre que l'équation (1), où le coefficient c reste indéterminé, représente une infinité de courbes du $n^{ième}$ degré passant toutes par n mêmes points situés sur l'axe des y, par n mêmes points situés sur l'axe des x, et par n mêmes points situés sur la droite à l'infini, et ayant chacune avec chacune des autres un contact de l'ordre $\mu - 1$ en chacun des n points de l'axe des y, un contact de l'ordre $\nu - 1$ en chacun des n points de l'axe des x, et un contact de l'ordre $n-(\mu+\nu)-1$ en chacun des n points situés à l'infini. On connaît ainsi d'avance tous les n^2 points d'intersection communs aux courbes

C_n; cela doit être, parce que l'on connaît $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ coefficients de l'équation, ce qui revient à connaître $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ points de la courbe, et qu'alors on a aussi tous les autres points d'intersection du faisceau de courbes passant par ces premiers points.

On pourra en particulier déterminer k, en prenant pour C'_n une fonction du $n^{ième}$ degré dépendante de $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ constantes, par exemple,

$$C''_n = P_n + C_{n-2},$$

où P_n est un produit de n droites quelconques, et C_{n-2} la courbe générale du $n - 2^{ième}$ degré. Égalant les coefficients de la fonction $P_n + C_{n-2}$ à ceux de la fonction C_n pour déterminer les premiers, on aura une équation de condition entre les coefficients donnés de la fonction C_n et le coefficient variable c. On prendra pour k une des valeurs de c qui satisfont à cette condition. Si alors on échange une de ces valeurs de c contre une autre, on voit que cela revient à faire varier c d'une quantité déterminée, et que les courbes C''_n font partie des courbes C_n. Il suit de là que les différentes courbes

$$(4) \qquad P_n + C_{n-2} = 0$$

correspondant aux différentes valeurs k qui satisfont à l'équation de condition, passent toutes par les mêmes points des deux axes et de la droite à l'infini, et ont en chacun de ces points des contacts de l'ordre $\mu - 1$, $\nu - 1$ et $n - (\mu + \nu) - 1$ respectivement.

On sait qu'il existe un nombre de manières, toujours limité, mais d'autant plus grand que le degré de la courbe est plus élevé, de donner à la courbe une forme dépendante de $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ constantes. Toutes les courbes C''_n qu'on obtient ainsi, et dont on détermine les coefficients au moyen des coefficients connus de C_n et de l'équation de condition qui renferme la variable c, passent par les mêmes points des axes et de la droite à l'infini en y ayant les contacts qu'on vient de dire.

Il faut cependant remarquer que chacune des formes C''_n dépendantes

de $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ constantes n'est pas compatible avec chacun des coefficients de C_n considéré comme variable. Ainsi soit proposée une courbe du troisième degré

$$C_3 = x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 + dx^2 + exy + fy^2 + gx + hy + i = 0,$$

et qu'on prenne pour C''_n la forme

$$(5)\ C''_3 = (x + \alpha y + \alpha')(x + \beta y + \beta')(x + \gamma y + \gamma') - (x + \delta y + \delta');$$

si l'on veut identifier les deux formes, on aura les relations

$$\begin{aligned}
a &= \alpha + \beta + \gamma,\\
b &= \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma,\\
c &= \alpha\beta\gamma,\\
d &= \alpha' + \beta' + \gamma',\\
e &= (\alpha + \beta)\gamma' + (\alpha + \gamma)\beta' + (\beta + \gamma)\alpha',\\
f &= \alpha\beta\gamma' + \alpha\beta'\gamma + \alpha'\beta\gamma,\\
g &= \alpha'\beta' + \alpha'\gamma' + \beta'\gamma' - 1,\\
h &= \alpha\beta'\gamma' + \alpha'\beta\gamma' + \alpha'\beta'\gamma - \delta,\\
i &= \alpha'\beta'\gamma' - \delta'.
\end{aligned}$$

On voit que les six premières de ces équations déterminent α, β, γ et α', β', γ'; mais, d'après la forme adoptée ici pour C''_3, g est uniquement fonction de ces quantités, de sorte que l'équation de condition qui permet de choisir cette forme, a lieu entre les coefficients a, b, c, d, e, f, g. Par conséquent, si c'était h ou i que l'on considérait comme variable, on ne pourrait pas, par la variation d'un de ces coefficients, amener C_3 à prendre la forme C''_3.

Si l'on cherche l'équation de condition qui a lieu entre les coefficients a, b, c, d, e, f, g, on trouve

$$\begin{aligned}
&(4abc - b^3 - 9c^2)d^2 + (ab^2 - 4a^2c + 3bc)de\\
&+ (3ac - b^2)(e^2 + 2df) + (ab - 9c)ef + (-a^2 + 3b)f^2\\
&- (a^2b^2 - 4a^3c + 18abc - 4b^3 - 27c^2)(g + 1) = 0.
\end{aligned}$$

Cette équation montre que, une courbe du troisième degré étant proposée, si on la coupe par deux droites quelconques en trois points p et en trois points p', il existera trois courbes du troisième ordre de la forme (5), touchant la proposée aux points p et la coupant aux points p'; qu'il existera deux courbes de cette forme qui ont avec la proposée un contact du second ordre aux trois points p; qu'il en existe pareillement deux, ayant leurs asymptotes parallèles à celles de la proposée, et touchant celle-ci aux trois points p, ou la coupant aux six points p et p'; enfin, qu'il n'existe qu'une seule courbe de ce genre ayant les mêmes asymptotes que la proposée et la coupant aux trois points p.

Le genre de courbes du troisième ordre pour lesquelles l'équation de condition ci-dessus a lieu, est caractérisé par la propriété que le produit des segments interceptés entre un point de la courbe et ses trois asymptotes sur une transversale parallèle à l'axe des x est égal au segment compris entre le même point de la courbe et la droite qui passe par les points où la courbe coupe les asymptotes.

II.

Considérons le cas où la courbe se décompose en un système de n droites, c'est-à-dire où la fonction C_n est égalée à un produit de n facteurs de la forme $x + \alpha y + \alpha'$; ce qui exige que les coefficients de C_n satisfassent à $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition. Si la courbe pouvait être identifiée de cette manière à deux systèmes distincts de n droites, les droites du premier système auraient avec les droites du second système en 3 fois n points situés respectivement sur les deux droites prises pour axes et sur la droite à l'infini des contacts de l'ordre $\lambda - 1$, $\mu - 1$, $\nu - 1$, où $\lambda + \mu + \nu = n$. Dès que $n > 2$, il n'existera donc qu'un seul système de droites. Il résulte de là le théorème algébrique suivant :

Soient $2n$ quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ et $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$, et désignons par $\sum\limits_{n}^{(\nu)} n$ la somme des termes qu'on obtient en écrivant d'abord la somme des produits des n quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, n$ à n, et remplaçant ensuite chaque terme de cette somme par la somme de termes qu'on obtient en accen-

tuant de toutes les manières possibles v *des facteurs de ce terme* [*], *d'où il suit que le nombre des termes de la somme* $\sum\limits_{u}^{(v)} n$ *est égal à* $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-u+1)}{1.2.3\ldots v.1.2.3\ldots(u-v)}$. *Cela posé, si l'on forme le système suivant*,

$$\sum_{1}^{(0)} n,\quad \sum_{1}^{(1)} n,\quad \sum_{2}^{(2)} n,\quad \sum_{3}^{(3)} n,\ldots,\quad \sum_{n-2}^{(n-2)} n,\quad \sum_{n-1}^{(n-1)} n,\quad \sum_{n}^{(n)} n,$$

$$\sum_{2}^{(0)} n,\quad \sum_{2}^{(1)} n,\quad \sum_{3}^{(2)} n,\quad \sum_{4}^{(3)} n,\ldots,\quad \sum_{n-1}^{(n-2)} n,\quad \sum_{n}^{(n-1)} n,$$

$$\sum_{3}^{(0)} n,\quad \sum_{3}^{(1)} n,\quad \sum_{4}^{(2)} n,\quad \sum_{5}^{(3)} n,\ldots,\quad \sum_{n}^{(n-2)} n,$$

. . . .

$$\sum_{n-2}^{(0)} n,\quad \sum_{n-2}^{(1)} n,\quad \sum_{n-1}^{(2)} n,\quad \sum_{n}^{(3)} n.$$

$$\sum_{n-1}^{(0)} n,\quad \sum_{n-1}^{(1)} n,\quad \sum_{n}^{(2)} n.$$

$$\sum_{n}^{(0)} n,\quad \sum_{n}^{(1)} n;$$

---

[*] *Exemple* : $\sum\limits_{4}^{(2)} 5 = \alpha'\beta'\gamma\delta + \alpha'\beta'\gamma\varepsilon + \alpha'\beta'\delta\varepsilon + \alpha'\gamma'\delta\varepsilon + \beta'\gamma'\delta\varepsilon$
$+ \alpha'\beta\gamma'\delta + \alpha'\beta\gamma'\varepsilon + \alpha'\beta\delta'\varepsilon + \alpha'\gamma\delta'\varepsilon + \beta'\gamma\delta'\varepsilon$
$+ \alpha'\beta\gamma\delta' + \alpha'\beta\gamma\varepsilon' + \alpha'\beta\delta\varepsilon' + \alpha'\gamma\delta\varepsilon' + \beta'\gamma\delta\varepsilon'$
$+ \alpha\beta'\gamma'\delta + \alpha\beta'\gamma'\varepsilon + \alpha\beta'\delta'\varepsilon + \alpha\gamma'\delta'\varepsilon + \beta\gamma'\delta'\varepsilon$
$+ \alpha\beta'\gamma\delta' + \alpha\beta'\gamma\varepsilon' + \alpha\beta'\delta\varepsilon' + \alpha\gamma'\delta\varepsilon' + \beta\gamma'\delta\varepsilon'$
$+ \alpha\beta\gamma'\delta' + \alpha\beta\gamma'\varepsilon' + \alpha\beta\delta'\varepsilon' + \alpha\gamma\delta'\varepsilon' + \beta\gamma\delta'\varepsilon'$.

Dans le produit de n facteurs linéaires, $\sum\limits_{u}^{(v)} n$ est le coefficient de $x^{n-u}y^{u-v}$; et en

où les sommes ayant pour indice supérieur o, et les sommes ayant les indices supérieurs et inférieurs égaux sont, comme on voit, les coefficients des deux équations du $n^{\text{ième}}$ *degré, dont les racines sont respectivement les* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *et les* $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$; *chacune de ces* $\frac{n(n+3)}{2}$ *fonctions peut s'exprimer rationnellement par les autres.*

Il n'est peut-être pas sans intérêt de vérifier à postériori, pour une valeur déterminée de n, le théorème qu'on vient de démontrer.

Soit $n = 3$, on aura

$$(1) \qquad a = \alpha + \beta + \gamma,$$
$$(2) \qquad b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma,$$
$$(3) \qquad c = \alpha\beta\gamma,$$
$$(4) \qquad d = \alpha' + \beta' + \gamma',$$
$$(5) \qquad e = \alpha\beta' + \alpha'\beta + \alpha\gamma' + \alpha'\gamma + \beta\gamma' + \beta'\gamma,$$
$$(6) \qquad f = \alpha\beta\gamma' + \alpha\beta'\gamma + \alpha'\beta\gamma,$$
$$(7) \qquad g = \alpha'\beta' + \alpha'\gamma' + \beta'\gamma',$$
$$(8) \qquad h = \alpha\beta'\gamma' + \alpha'\beta\gamma' + \alpha'\beta'\gamma,$$
$$(9) \qquad i = \alpha'\beta'\gamma'.$$

Des équations (4), (5), (6), on tire

$$\alpha' = \frac{f - \alpha e + \alpha^2 d}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad \beta' = \frac{-f + \beta e - \beta^2 d}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}, \quad \gamma' = \frac{f - \gamma e + \gamma^2 d}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (7), (8), (9) et remplaçant les fonctions symétriques de α, β, γ par leurs valeurs en a, b, c, on

---

passant du $(n-1)^{\text{ième}}$ produit au $n^{\text{ième}}$, le $n^{\text{ième}}$ facteur linéaire étant $x + \rho y + \rho'$, on a

$$x.\sum_{u}^{(v)} n-1.x^{n-u-1}.y^{u-v} + \rho y.\sum_{u-1}^{(v)} n-1.x^{n-u}.y^{u-v-1} + \rho'.\sum_{u-1}^{(v-1)} n-1.x^{n-u}.y^{u-v}$$
$$= \sum_{u}^{(v)} n.x^{n-u}.y^{u-v}.$$

obtient

$$(10)\left\{\begin{aligned}&(a^2b^2-4a^3c+18abc-4b^3-27c^2)g\\&=(4abc-b^3-9c^2)d^2+(ab^2-4a^2c+3bc)de\\&\quad+(3ac-b^2)(e^2+2df)+(ab-9c)ef+(-a^2+3b)f^2,\end{aligned}\right.$$

$$(11)\left\{\begin{aligned}&(a^2b^2-4a^3c+18abc-4b^3-27c^2)h\\&=(3ac-b^2)cd^2+(ab-9c)cde+(-a^2+3b)c(e^2+2df)\\&\quad+(a^2b+3ac-4b^2)ef+(-a^3+4ab-9c)f^2,\end{aligned}\right.$$

$$(12)\left\{\begin{aligned}&(a^2b^2-4a^3c+18abc-4b^3-27c^2)i\\&=-c^2d^3+bcd^2e-acde^2+ce^3-(b^2-2ac)d^2f\\&\quad+(ab-3c)def-be^2f-(a^2-2b)df+aef^2-f^3.\end{aligned}\right.$$

On a donc exprimé rationnellement g, h, i par a, b, c, d, e, f.

On remarque en outre que, en remplaçant dans le système des équations (1) à (9)

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \alpha',\quad \beta',\quad \gamma',$$

par

$$\alpha',\quad \beta',\quad \gamma',\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,$$

ou par

$$\frac{\alpha'}{\alpha},\quad \frac{\beta'}{\beta},\quad \frac{\gamma'}{\gamma},\quad \frac{1}{\alpha},\quad \frac{1}{\beta},\quad \frac{1}{\gamma},$$

on remplace

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f,\quad g,\quad h,\quad i,$$

par

$$d,\quad g,\quad i,\quad a,\quad e,\quad h,\quad b,\quad f,\quad c,$$

ou par

$$\frac{f}{c},\quad \frac{h}{c},\quad \frac{i}{c},\quad \frac{b}{c},\quad \frac{e}{c},\quad \frac{g}{c},\quad \frac{a}{c},\quad \frac{d}{c},\quad \frac{1}{c};$$

de sorte que l'on peut immédiatement écrire les équations au moyen desquelles b, c, f s'expriment rationnellement par a, d, e, g, h, i et a, d par b, c, e, f, g, h, i. Quant à e, on l'exprime rationnellement par a, b, c, d, f, g, h en éliminant e^2 entre les équations (10) et (11).

Nous avons exclu ci-dessus le cas de $n=2$. On remarque en effet que, si l'on fait varier dans l'équation du second degré à deux variables le coefficient de xy, de x, ou de y, on obtient toutes les co-

niques qui passent par les intersections d'une d'entre elles avec les deux axes, ou avec un axe et la droite à l'infini. Mais c'est ce qui peut se faire par un système de deux droites dans les trois cas de deux manières différentes. On voit ainsi à priori que l'équation de condition qui exprime qu'une conique se décompose en deux droites, doit être du second degré par rapport aux coefficients de xy, de x et de y, tandis qu'elle doit être du premier degré par rapport aux trois autres coefficients.

III.

Supposons actuellement que la courbe de degré n ait été décomposée en plusieurs courbes de degrés inférieurs, dont une soit du degré p. Si, par un changement du coefficient du terme en $x^\mu y^\nu$, on pouvait décomposer la courbe de degré n dans un autre système de même espèce, la courbe de degré p du nouveau système devrait passer par p des points où l'ancien système coupe l'axe des y, et avoir en chacun de ces points μ points communs avec l'ancien système; de même elle devrait avoir respectivement ν et $n-\mu-\nu$ points communs avec l'ancien système en p points où celui-ci coupe l'axe des x, et en p points où il coupe la droite à l'infini; c'est-à-dire qu'elle serait assujettie à passer par pn points donnés d'avance; mais cela est impossible, parce qu'on ne peut disposer pour la courbe de degré p que de $\frac{p(p+3)}{2}$ constantes au plus, nombre plus petit que pn dès que $n>2$. Lorsque parmi les courbes de degré inférieur il s'en trouve plusieurs de même degré et dépendant d'un même nombre de constantes, on pourrait concevoir que l'une d'elles prît la place d'une autre et réciproquement; mais cela ne produirait pas un système distinct du premier.

Il suit de là que *si l'on forme le produit de plusieurs fonctions à deux variables dont ρ de degré r, σ de degré s, τ de degré t, où*

$$\rho r+\sigma s+\tau t+\ldots=n,$$

et dans lesquelles les termes x^r, x^s, x^t, etc., ont l'unité pour coefficient, et qu'on égale les $\frac{n(n+3)}{2}$ coefficients du résultat ordonné suivant

les puissances de x et y à $\frac{n(n+3)}{2}$ quantités a, b, c, etc. : chacune de ces dernières quantités pourra s'exprimer rationnellement par les autres.

Il n'est peut-être pas entièrement sans intérêt de voir aussi pour ce théorème comment il pourra se vérifier à postériori dans un cas déterminé, choisi comme exemple. Identifions la fonction du troisième degré à deux variables avec le produit

$$(x^2 + \alpha xy + \beta y^2 + \gamma x + \delta y + \varepsilon)(x + \alpha' y + \beta').$$

On aura

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \alpha + \alpha', \\ b &= \alpha\alpha' + \beta, \\ c &= \alpha'\beta, \\ d &= \beta' + \gamma, \\ e &= \alpha\beta' + \alpha'\gamma + \delta, \\ f &= \alpha'\delta + \beta\beta', \\ g &= \beta'\gamma + \varepsilon, \\ h &= \alpha'\varepsilon + \beta'\delta, \\ i &= \beta'\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

Éliminant d'abord α', β', ε, β, δ, on obtient

$$(2)\quad c = ab - (a^2 + b)\alpha + 2a\alpha^2 - \alpha^3,$$

$$(3)\quad f = (ae + bd) - (2ad + e)\alpha - (a^2 + b)\gamma + 4a\alpha\gamma + 2d\alpha^2 - 3\alpha^2\gamma,$$

$$(4)\quad h = (ag + de) - (2ad + e)\gamma - (d^2 + g)\alpha + 4d\gamma\alpha + 2a\gamma^2 - 3\gamma^2\alpha,$$

$$(5)\quad i = dg - (d^2 + g)\gamma + 2d\gamma^2 - \gamma^3.$$

Tirant de l'équation (3) la valeur de γ et la substituant dans l'équation (5), on obtient une équation du sixième degré en α ; éliminant α entre cette dernière et l'équation (2), on obtient

$$(6)\qquad \mathcal{F}(a, b, c, d, e, f, g, i) = 0,$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction rationnelle ; la forme des équations (2) à (5)

montre qu'on aura en même temps

$$(7) \qquad \mathfrak{F}(d, g, i, a, e, h, b, c) = 0.$$

Éliminant entre (6) et (7) successivement les puissances supérieures à la première de a, b, c, d, e, g, i, on exprimera respectivement chacune de ces quantités rationnellement par les autres et f, h.

Tirant ensuite de l'équation (3) la valeur de α, substituant cette valeur dans l'équation (4) et faisant disparaître le radical par une élévation au carré, on obtient une équation du sixième degré en γ, et, par l'élimination de γ entre celle-ci et l'équation (5) une équation

$$(8) \qquad \mathrm{F}(a, b, d, e, f, g, h, i) = 0;$$

on aura en même temps

$$(9) \qquad \mathrm{F}(d, g, a, e, h, b, f, c) = 0,$$

et les équations (8) et (9) serviront à exprimer rationnellement f et h par les autres quantités a, b, c, etc.

SUR

UNE CLASSE DE FONCTIONS

QUI PEUVENT S'EXPRIMER RATIONNELLEMENT LES UNES PAR LES AUTRES;

PAR M. WOEPCKE.

Désignant par N le nombre des termes d'une fonction du $n^{ième}$ degré à m variables diminué d'une unité, ou le nombre des coefficients de cette fonction ; désignant pareillement par P, Q, R, etc., le même nombre pour des fonctions de degré p, q, r, etc., et supposant

$$p + q + r + \ldots = n,$$

on a

$$\mathrm{N} > \mathrm{P} + \mathrm{Q} + \mathrm{R} + \ldots,$$

ce qui sera démontré ci-après. Donc si l'on identifie une fonction du $n^{ième}$ degré à m variables à un produit de plusieurs fonctions à m variables de degrés inférieurs p, q, r, etc., où

$$p + q + r + \ldots = n,$$

on pourra d'abord exprimer

$$\mathrm{P} + \mathrm{Q} + \mathrm{R} + \ldots = \mathrm{S}$$

coefficients de la fonction du $n^{ième}$ degré au moyen des S coefficients des fonctions de degrés inférieurs. Cela fait, les $\mathrm{N} - \mathrm{S} = \mathrm{D}$ autres coefficients de la fonction du $n^{ième}$ degré dépendent des S premiers au moyen de D équations de condition qui doivent avoir lieu pour que l'identification soit possible. Si au moyen de ces équations, soit immédiatement, soit en les combinant entre elles, on ne pouvait pas exprimer un quelconque des N coefficients rationnellement par les autres, il s'ensuivrait que différentes valeurs de ce coefficient seraient compa-

tibles avec un seul et même système de valeurs de tous les autres coefficients. Par conséquent un produit quelconque de fonctions à m variables de degrés p, q, r, etc., étant donné, on pourrait en déterminer un second de telle sorte qu'après l'effectuation de la multiplication l'un des produits ne différât de l'autre que par un seul terme. Désignant le produit proposé par F, celui qu'il s'agirait de déterminer par F', et les m variables respectivement par x_1, x_2, x_3, ..., x_m, on aurait donc

$$(1) \qquad F' = F + \lambda . x_1^{e_1} x_2^{e_2} x_3^{e_3} \ldots x_m^{e_m},$$

où les exposants e peuvent prendre aussi la valeur zéro et où

$$e_1 + e_2 + e_3 + \ldots \overline{\gtrless} n.$$

Il faut remarquer que le produit $x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_m^{e_m}$ doit être considéré comme une fonction à m variables aussi dans le cas où des exposants e prendraient la valeur zéro; car on pourrait dans ce cas, par une substitution linéaire, faire reparaître toutes les variables, comme on peut dans l'équation du plan $x = 0$ faire reparaître les deux autres variables par un changement de coordonnées. De même ce produit doit être considéré comme étant du degré n; car si la somme des e était inférieure à n, on n'aurait qu'à rendre l'équation (1) homogène en remplaçant les m variables par leurs rapports à une $(m+1)^{\text{ième}}$ variable. Cette addition d'une unité au nombre des variables ne change en rien les raisonnements suivants en tant qu'il y entre le nombre des variables des fonctions que l'on considère, parce que la fonction homogène à $m + 1$ variables et la fonction non homogène à m variables dépendent du même nombre de constantes.

Il s'agit donc d'examiner si l'on peut avoir

$$F' = F + \lambda . \varphi,$$

où F et φ sont deux fonctions données du $n^{\text{ième}}$ degré à m variables. Or N étant le nombre des coefficients de la fonction du $n^{\text{ième}}$ degré à m variables (ou de la fonction homogène du $n^{\text{ième}}$ degré à $m + 1$ variables), quelle que soit la fonction $\mathcal{F} = F + \lambda\varphi$, elle sera déterminée

par N systèmes de valeurs des variables qui la rendent égale à zéro, et l'on voit qu'un seul de ces systèmes de valeurs pourra l'annuler sans annuler simultanément F et φ; ce système, substitué dans l'équation

$$F + \lambda\varphi = 0,$$

détermine λ; mais les autres $N - 1$ systèmes de valeurs qui satisfont à $\mathfrak{F} = 0$ doivent nécessairement annuler simultanément F et φ.

Un produit quelconque F de plusieurs fonctions à m variables de degrés p, q, r, etc., étant proposé, pour qu'un autre produit semblable F' pût être de la forme $F + \lambda\varphi$, il faudrait donc pouvoir l'assujettir à s'annuler pour $N - 1$ systèmes de valeurs des variables qui annulent simultanément F et φ. Mais cela est impossible, parce que le nombre des constantes dont on peut disposer pour F', à savoir le nombre des coefficients de toutes les fonctions de degrés inférieurs au $n^{\text{ème}}$ dont F' est le produit, est plus petit que $N - 1$.

En effet, on a

$$N = m.n + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots,$$

formule qu'on obtient immédiatement en remarquant que dans la fonction générale du $n^{\text{ième}}$ degré à m variables le nombre des groupes de termes affectés de k variables doit être celui des combinaisons de m éléments k à k, que chacun de ces groupes renferme autant de termes qu'il y a de sommes de k nombres entiers égales aux nombres depuis k jusqu'à n, et que le nombre de ces sommes est celui des combinaisons de n éléments k à k [*].

Cela posé, supposons d'abord que F' soit le produit de deux fonctions à m variables de degré p et $n - p$; il faudra démontrer que

$$-1 + mn + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots$$

---

[*] M. Plucker a trouvé cette formule par d'autres considérations (*Journal* de Crelle, t. XVI, p. 56).

$$> mp + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{p(p-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} + \ldots$$

$$+ m(n-p) + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{(n-p)(n-p-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)}{1.2.3} + \ldots.$$

Si m est égal au plus petit des deux nombres p et $n-p$, ou plus petit, les trois suites seront d'un même nombre de termes (en faisant abstraction du terme -1 de la première). Si m est plus grand que ce nombre, le nombre des termes de la première suite dépassera celui de l'une des deux autres suites ou de toutes les deux. Il suffira donc de prouver que

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-\nu) > p(p-1)(p-2)\ldots(p-\nu) + (n-p)(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-p-\nu).$$

Désignant ces trois produits respectivement par

$$\mathrm{P}(n-\nu),\quad \mathrm{P}(p-\nu),\quad \mathrm{P}(n-p-\nu),$$

si

$$\mathrm{P}(n-\nu) > \mathrm{P}(p-\nu) + \mathrm{P}(n-p-\nu),$$

on aura aussi

$$\mathrm{P}(n-\nu-1) > \mathrm{P}(p-\nu-1) + \mathrm{P}(n-p-\nu-1);$$

car

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(n-\nu)\times\{n-\nu-1\}\\
&> \{\mathrm{P}(p-\nu)+\mathrm{P}(n-p-\nu)\}\{n-\nu-1\}\\
&> \{\mathrm{P}(p-\nu)+\mathrm{P}(n-p-\nu)\}\{n-2\nu-2\}\\
&= \{\mathrm{P}(p-\nu)+\mathrm{P}(n-p-\nu)\}\{(p-\nu-1)+(n-p-\nu-1)\}\\
&> \mathrm{P}(p-\nu)\times\{p-\nu-1\}+\mathrm{P}(n-p-\nu)\times\{n-p-\nu-1\};
\end{aligned}$$

mais on a

$$n(n-1) > p(p-1) + (n-p)(n-p-1),$$

donc

$$P(n-\nu) > P(p-\nu) + P(n-p-\nu).$$

Le terme -1 de la première des trois suites fait qu'il faut exclure le cas $m=2$, $n=2$.

Le nombre des coefficients (moins un) d'une fonction à m variables de degré n étant plus grand que celui des coefficients de deux fonctions à m variables de degrés p et q, où $p+q=n$, et le nombre des coefficients d'une de ces dernières fonctions, par exemple de celle de degré p, étant de même plus grand que celui de deux fonctions de degrés r et s, où $r+s=p$, et ainsi de suite, il résulte que le nombre des coefficients (moins un) d'une fonction à m variables de degré n est plus grand que celui des coefficients d'un nombre quelconque (mais non supérieur à n) de fonctions de degré r, s, t, etc., où

$$r+s+t+\ldots=n.$$

Il est donc démontré qu'un produit quelconque de fonctions à m variables étant proposé, il n'est pas possible d'en déterminer un autre semblable et tel, qu'après l'effectuation des multiplications il ne diffère du premier que par le coefficient d'un seul terme.

Il suit de là que *si l'on effectue la multiplication d'un produit d'un nombre quelconque de fonctions à* m *variables de degrés* r, s, t, *etc., où* $r+s+t+\ldots=n$, *que l'on ordonne le résultat suivant les puissances des variables de manière à avoir* $N+1$ *termes et* N *coefficients qui sont des fonctions des coefficients des fonctions de degrés inférieurs, et que l'on égale ces* N *coefficients à* N *quantités* A, B, C, etc.; *chacune de ces dernières quantités peut s'exprimer rationnellement par les autres.*

Considérons en particulier le cas où la fonction de degré n est le produit de n fonctions linéaires de la forme

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_m x_m + 1,$$

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_m x_m + 1,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3 + \ldots + \nu_m x_m + 1.$$

Il ne serait pas difficile d'établir une formule qui montrât la forme sous laquelle se présente le produit effectué pour un nombre n quelconque. Mais je préfère donner cette formule pour un cas déterminé, en prenant $n = 5$. Cet exemple suffira pour faire connaître la loi d'après laquelle sont formés les termes du produit effectué pour une valeur quelconque de n; il aura l'avantage, tout en occupant déjà beaucoup de place, d'en prendre moins que la formule générale, et, en outre, de faire voir tous les termes du produit effectué, tandis que dans la formule générale il faudrait passer des séries de termes placés au milieu, ce qui dans le cas actuel n'est pas sans inconvénients.

Dans la formule en question (page 345), j'ai placé au-dessous de chaque signe de somme le nombre des termes auxquels il donne lieu, en désignant par c_q^p le nombre des combinaisons de p éléments q à q, et par $r!$ le produit $1.2.3\ldots r$.

Les signes de somme intérieurs indiquent qu'il faut former d'abord au moyen des n lettres α, β, γ, etc., la somme des combinaisons indiquées par le signe c_q^n placé au-dessous du signe de sommation, et remplacer ensuite chaque terme de cette somme par la somme qu'on obtient en permutant de toutes les manières possibles les indices de ces lettres.

Les signes de somme extérieurs indiquent qu'il faut donner aux indices des α, β, γ, etc., et des x toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à m, en excluant les cas qui rendraient quelques-uns des nombres k, i, h, g, etc., égaux.

Voici donc la formule dont il s'agit :

$$\sum_{c_1'''}\left\{\sum_{c_5^5}\alpha_h\beta_h\gamma_h\delta_h\varepsilon_h\right\}x_h^5+\sum_{2.c_2'''}\left\{\sum_{\frac{5!}{4!}c_5^5}\alpha_i\beta_k\gamma_h\delta_h\varepsilon_k\right\}x_i x_k^4+\sum_{2.c_2'''}\left\{\sum_{\frac{5!}{2!\,3!}c_5^5}\alpha_i\beta_i\gamma_h\delta_h\varepsilon_h\right\}x_i^2x_k^3$$

$$+\sum_{3.c_3'''}\left\{\sum_{\frac{5!}{3!}c_5^5}\alpha_h\beta_i\gamma_h\delta_h\varepsilon_k\right\}x_h x_i x_k^3+\sum_{3\,c_3'''}\left\{\sum_{\frac{5!}{2!\,2!}c_5^5}\alpha_h\beta_i\gamma_i\delta_h\varepsilon_k\right\}x_h x_i^2 x_k^2$$

$$+\sum_{4.c_4'''}\left\{\sum_{\frac{5!}{2!}c_5^5}\alpha_g\beta_h\gamma_i\delta_h\varepsilon_k\right\}x_g x_h x_i x_k^2+\sum_{c_5'''}\left\{\sum_{5!\,c_5^5}\alpha_f\beta_g\gamma_h\delta_i\varepsilon_k\right\}x_f x_g x_h x_i x_k$$

$$+\sum_{c_1'''}\left\{\sum_{c_4^5}\alpha_k\beta_k\gamma_k\delta_k\right\}x_k^4\quad+\sum_{2.c_2'''}\left\{\sum_{\frac{4!}{3!}c_4^5}\alpha_i\beta_h\gamma_h\delta_k\right\}x_i x_k^3+\sum_{c_2'''}\left\{\sum_{\frac{4!}{2!\,2!}c_4^5}\alpha_i\beta_i\gamma_h\delta_k\right\}x_i^2x_k^2$$

$$+\sum_{3.c_3'''}\left\{\sum_{\frac{4!}{2!}c_4^5}\alpha_h\beta_i\gamma_h\delta_k\right\}x_h x_i x_k^2+\sum_{c_4'''}\left\{\sum_{4!\,c_4^5}\alpha_g\beta_h\gamma_i\delta_k\right\}x_g x_h x_i x_k$$

$$+\sum_{c_1'''}\left\{\sum_{c_3^5}\alpha_k\beta_k\gamma_k\right\}x_k^3\quad+\sum_{2.c_2'''}\left\{\sum_{\frac{3!}{2!}c_3^5}\alpha_i\beta_k\gamma_k\right\}x_i x_k^2+\sum_{c_3'''}\left\{\sum_{3!\,c_3^5}\alpha_h\beta_i\gamma_k\right\}x_h x_i x_k$$

$$+\sum_{c_1'''}\left\{\sum_{c_2^5}\alpha_k\beta_k\right\}x_k^2\quad+\sum_{c_2'''}\left\{\sum_{2!\,c_2^5}\alpha_i\beta_k\right\}x_i x_k$$

$$+\sum_{c_1'''}\left\{\sum_{c_1^5}\alpha_k\right\}x_k\quad+1.$$

Il est facile maintenant de former le groupe de termes que l'on voudra pour une valeur de n supérieure à 5 Soit, par exemple, $n = 24$, et proposons-nous de former le groupe des termes affectés de huit variables, dans lesquels trois de ces variables sont élevées au premier degré, une au second, deux au troisième, une au quatrième et une au cinquième: on aura

$$\sum_{\frac{8!}{2!\,3!}c_8^m} \left\{ \sum_{\frac{20!}{2!\,3!\,3!\,4!\,5!}c_{20}^{24}} \alpha_c \beta_d \gamma_e \delta_f \varepsilon_f \zeta_g \eta_g \theta_g \iota_h \varkappa_h \lambda_h \mu_i \nu_i \xi_i o_i \pi_k \rho_k \sigma_k \tau_k \upsilon_k \right\} x_c x_d x_e x_f^2 x_g^3 x_h^3 x_i^4 x_k^5.$$

Les signes de somme intérieurs sont ceux qui déterminent la formation des coefficients du produit effectué ; ce sont les fonctions dont chacune s'exprime rationnellement par les autres. On voit que parmi ces fontions se trouvent les coefficients de m équations du $n^{ième}$ degré à une inconnue qui ont pour racines respectivement les $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \nu_1$, les α_2. $\beta_2, \gamma_2, \ldots, \nu_2$, etc., et enfin les $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \ldots, \nu_m$.

SUR

LES LIGNES DE COURBURE ET LES LIGNES GÉODÉSIQUES DES SURFACES DÉVELOPPABLES DONT LES GÉNÉRATRICES SONT PARALLÈLES A CELLES D'UNE SURFACE RÉGLÉE QUELCONQUE;

PAR M. H. MOLINS,

Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse.

On sait qu'on peut tracer sur une surface développable deux groupes rectangulaires de lignes géodésiques, et qu'il existe une infinité de groupes pareils; c'est ce que l'on voit immédiatement en concevant que la surface soit développée sur un plan, auquel cas deux groupes rectangulaires de lignes géodésiques se transforment en deux groupes rectangulaires de droites parallèles. Ce sont ces systèmes de lignes dont nous nous proposons d'exposer quelques propriétés qui mettront en évidence les rapports remarquables qui existent entre les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces développables. Parmi les résultats auxquels nous arrivons, nous citerons les suivants : 1° l'arête de rebroussement d'une surface développable est une ligne géodésique du lieu de ses centres de courbure, et ce lieu se trouve être la surface polaire de chacune des lignes de courbure de cette surface; 2° étant donnés deux systèmes orthogonaux de lignes géodésiques d'une surface développable, si l'on prend une ligne quelconque de l'un de ces systèmes pour arête de rebroussement d'une autre surface développable, toutes celles de l'autre système sont les lieux des centres de courbure de cette seconde surface, relatifs à ses diverses lignes de courbure; et si l'on prend les lignes de chaque système pour arêtes de rebroussement d'autant de surfaces développables, il en résulte deux systèmes orthogonaux de surfaces développables, qui sont tels, que deux surfaces de systèmes différents se coupent suivant une

courbe qui est une ligne de courbure de chaque surface; 3° aux points où deux lignes géodésiques de systèmes différents rencontrent une même génératrice de la surface qui les contient, les angles de contingence et de torsion de l'une sont respectivement égaux aux angles de torsion et de contingence de l'autre, quelle que soit cette génératrice : d'ailleurs, en ces mêmes points, les tangentes des deux lignes sont perpendiculaires entre elles.

Nous commençons par déterminer, sous forme intégrable, les équations d'une ligne de courbure quelconque d'une surface développable dont les génératrices sont parallèles à celles d'une surface réglée qu'on suppose connue, ce qui nous conduit à des formules très-simples qui donnent, en grandeur et en direction, le rayon de courbure de cette ligne.

1. Considérons donc une surface réglée quelconque, gauche ou développable, et supposons qu'on connaisse la loi à laquelle est soumise la direction des génératrices de cette surface. Ainsi, en désignant par α, β, γ les angles que fait une génératrice quelconque avec trois axes coordonnés rectangulaires, admettons que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont des fonctions connues d'une variable indépendante t; si nous posons

$$(1)\qquad \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = u, \quad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = v,$$

les quantités u et v seront aussi des fonctions connues de t. Cherchons d'abord les équations générales des courbes dont les tangentes seraient parallèles aux génératrices de la surface donnée.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque d'une de ces courbes, lequel répondra à une certaine génératrice de la surface donnée, et par conséquent à une certaine valeur de t : ces trois quantités sont donc des fonctions de t, qu'il s'agit de déterminer; désignons-les par $\mathrm{F}t$, ft, φt, de sorte que l'on ait

$$(2)\qquad x = \mathrm{F}t, \quad y = ft, \quad z = \varphi t.$$

Lorsque ces fonctions seront connues, on obtiendra les équations de la courbe en éliminant t entre les équations (2).

Si nous représentons, pour abréger, par G le radical

$$\sqrt{(F't)^2 + (f't)^2 + (\varphi't)^2},$$

pris avec l'un ou avec l'autre des signes $\pm$, les quantités

$$\frac{F't}{G}, \quad \frac{f't}{G}, \quad \frac{\varphi't}{G}$$

seront les cosinus des angles que fait avec les axes la tangente de la courbe au point (x, y, z); et comme cette tangente doit être parallèle à la génératrice correspondante de la surface donnée, nous poserons les trois équations

$$\frac{F't}{G} = \cos\alpha, \quad \frac{f't}{G} = \cos\beta, \quad \frac{\varphi't}{G} = \cos\gamma,$$

d'où

$$\frac{F't}{\varphi't} = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad \frac{f't}{\varphi't} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

ou bien, en vertu des équations (1),

$$\frac{F't}{\varphi't} = u, \quad \frac{f't}{\varphi't} = v.$$

On déduit de là

$$F't = u\varphi't, \quad f't = v\varphi't;$$

donc, en intégrant, et remplaçant $\varphi't\,dt$ par $d\varphi$, on aura

$$Ft = \int u\,d\varphi + C, \quad ft = \int v\,d\varphi + C',$$

C et C' étant deux constantes arbitraires. Il vient alors, en substituant ces expressions dans les équations (2),

$$(3) \qquad x = \int u\,d\varphi + C, \quad y = \int v\,d\varphi + C', \quad z = \varphi t.$$

Ce sont là les expressions de x, y, z en fonction de u, v et de la quantité φt, qui reste une fonction de t entièrement arbitraire.

En différentiant les équations (3), on obtient

$$(4)\qquad dx = u\,d\varphi,\quad dy = v\,d\varphi,\quad dz = d\varphi;$$

par suite, en désignant par s un arc de la courbe compté à partir d'un point fixe et aboutissant au point (x, y, z),

$$ds = \sqrt{u^2 + v^2 + 1}\,d\varphi,$$

ou bien,

$$(5)\qquad ds = \frac{d\varphi}{\cos\gamma},$$

d'où

$$(6)\qquad s = \int \frac{d\varphi}{\cos\gamma} + \mathrm{K},$$

K étant une nouvelle constante arbitraire dont la valeur dépendra, dans chaque cas, du choix du point fixe pris pour origine des arcs. Au moyen des équations (4) et (5), on vérifie immédiatement que l'on a

$$\frac{dx}{ds} = u\cos\gamma,\quad \frac{dy}{ds} = v\cos\gamma,\quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma,$$

ou bien, en vertu des équations (1),

$$(7)\qquad \frac{dx}{ds} = \cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta,\quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma;$$

ce qui montre que la tangente de la courbe au point (x, y, z) est bien parallèle à la droite dont la direction est déterminée par les angles α, β, γ.

Si l'on faisait $\varphi' t = \cos\gamma$, les équations (3) et (6) deviendraient, en mettant pour u et v leurs valeurs données par les équations (1),

$$x = \int \cos\alpha\,dt + \mathrm{C},\quad y = \int \cos\beta\,dt + \mathrm{C}',\quad z = \int \cos\gamma\,dt + \mathrm{C}'',$$
$$s = t + \mathrm{K},$$

C″ étant une nouvelle constante arbitraire.

2. Cherchons les angles de contingence et de torsion de la courbe que nous venons de déterminer; nous désignerons par ε et ω ces deux angles, par ρ le rayon de courbure, par λ, μ, ν les angles qu'il fait avec

les axes. Il vient d'abord

$$\cos\lambda = \frac{\rho}{ds}\, d\frac{dx}{ds}, \quad \cos\mu = \frac{\rho}{ds}\, d\frac{dy}{ds}, \quad \cos\nu = \frac{\rho}{ds}\, d\frac{dz}{ds},$$

ou bien, en remplaçant $\frac{\rho}{ds}$ par $\frac{1}{\varepsilon}$, et ayant égard aux formules (7),

$$(8) \qquad \cos\lambda = \frac{1}{\varepsilon}\, d\cos\alpha, \quad \cos\mu = \frac{1}{\varepsilon}\, d\cos\beta, \quad \cos\nu = \frac{1}{\varepsilon}\, d\cos\gamma,$$

relations qui, ajoutées ensemble, après qu'on les a élevées au carré, donnent la formule

$$(9) \qquad \varepsilon = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2},$$

on en déduit

$$\rho = \frac{ds}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}},$$

ou bien, en mettant pour ds sa valeur donnée par la formule (5),

$$\rho = \frac{d\varphi}{\cos\gamma\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}}.$$

Pour obtenir ω, on différentie deux fois de suite les équations (4), ce qui donne

$$d^2x = u\,d^2\varphi + du\,d\varphi, \quad d^2y = v\,d^2\varphi + dv\,d\varphi, \quad d^2z = d^2\varphi,$$

$$d^3x = u\,d^3\varphi + 2du\,d^2\varphi + d^2u\,d\varphi, \quad d^3y = v\,d^3\varphi + 2dv\,d^2\varphi + d^2v\,d\varphi,$$
$$d^3z = d^3\varphi;$$

par suite, on trouve les expressions suivantes :

$$d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y = dv\,d\varphi\,d^3\varphi - 2dv\,d^2\varphi^2 - d^2v\,d\varphi\,d^2\varphi,$$

$$d^2z\,d^2x - d^3x\,d^3z = -du\,d\varphi\,d^3\varphi + 2du\,d^2\varphi^2 + d^2u\,d\varphi\,d^2\varphi,$$

$$d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x = (u\,dv - v\,du)(2d^2\varphi^2 - d\varphi\,d^3\varphi)$$
$$+ (u\,d^2v - v\,d^2u)\,d\varphi\,d^2\varphi + (du\,d^2v - dv\,d^2u)\,d\varphi^2.$$

Multipliant ces expressions par dx, dy, dz, dont les valeurs sont déter-

minées par les formules (4), on obtient, toutes réductions faites,

$$dx(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y) + dy(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z) + dz(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x) = (du\,d^2v - dv\,d^2u)\,d\varphi^3.$$

Or l'angle de torsion se détermine par la formule

$$\omega = \frac{1}{\varepsilon^2\,ds^3}\left[\begin{array}{r} dx(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y) + dy(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z) \\ + dz(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x) \end{array}\right];$$

mettant à la place de la quantité entre parenthèses sa valeur donnée par l'équation précédente, on trouve

$$\omega = \frac{1}{\varepsilon^2\,ds^3}(du\,d^2v - dv\,d^2u)\,d\varphi^3,$$

ou bien,

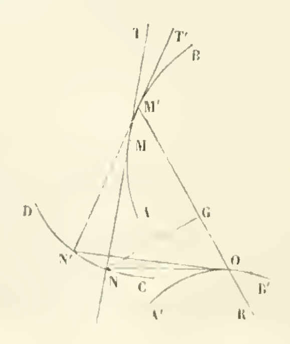
$$(10)\qquad \omega = \frac{\cos^3\gamma}{\varepsilon^2}(du\,d^2v - dv\,d^2u).$$

Le rayon de la seconde courbure, que nous désignerons par r, s'obtiendra par la formule

$$r = \frac{ds}{\omega}, \quad \text{ou} \quad r = \frac{\varepsilon^2\,d\varphi}{\cos^3\gamma\,(du\,d^2v - dv\,d^2u)}.$$

On remarquera que les valeurs de ε et ω, que déterminent les formules (9) et (10), sont indépendantes de la fonction φ, comme il fallait s'y attendre, puisque ces quantités ne peuvent dépendre évidemment que de la direction des génératrices de la surface donnée.

5. Représentons maintenant par AB la courbe que nous venons de



déterminer; la surface développable dont il s'agit de chercher les lignes de courbure, est le lieu des tangentes de cette courbe. Soient M, M' deux points consécutifs de AB, répondant à t et $t + dt$, MT la tangente en M, M'T' la tangente en M'; l'élément MM' est égal à ds, que nous supposerons positif, pour fixer les idées, en admettant que les arcs positifs soient comptés de A vers B. La surface développable dont AB est l'arête de rebroussement, se compose de deux nappes, dont l'une contient les parties de tangentes MT, M'T', et l'autre leurs prolongements MN, M'N' : considérons, par exemple, cette dernière nappe, et soient N, N' les points où une ligne de courbure quelconque CD rencontre les génératrices MN, M'N'; comme les lignes de courbure d'une surface développable coupent à angle droit ses diverses génératrices, l'élément NN' doit être perpendiculaire à MN. Appelons x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point N qui sur la ligne de courbure répond au point M de la courbe AB, ou à la valeur de t relative à ce dernier point, s_1 l'arc de la même ligne compté à partir d'un point fixe et aboutissant au point (x_1, y_1, z_1), ε_1 et ω_1 ses angles de contingence et de torsion, ρ_1 son rayon de courbure, p la longueur de la partie de génératrice MN; ces diverses quantités sont des fonctions de t qu'il faut déterminer.

La quantité p représentant la longueur de la partie de génératrice MN comprise entre le point de contact M et la ligne de courbure, il s'ensuit que $p + dp$ représente M'N'; on a donc

$$\mathrm{M'N'} = p + dp.$$

Mais l'élément NN' étant perpendiculaire à MN, on a encore, aux infiniment petits du second ordre près,

$$\mathrm{M'N'} = \mathrm{M'N} = \mathrm{MN} + \mathrm{MM'} = p + ds,$$

par suite,

$$(11) \qquad dp = ds, \qquad \text{ou} \qquad dp = \frac{d\varphi}{\cos\gamma},$$

d'où

$$(12) \qquad p = s + \mathrm{K'}, \quad \text{ou} \quad p = \int \frac{d\varphi}{\cos\gamma} + \mathrm{K'},$$

K' étant une constante arbitraire dont les valeurs particulières répondront aux diverses lignes de courbure de la surface.

Cela posé, la partie MT de la tangente en M à la courbe AB faisant avec les axes des angles dont les cosinus sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, son prolongement MN fera, avec les mêmes axes, des angles ayant pour cosinus $-\frac{dx}{ds}$, $-\frac{dy}{ds}$, $-\frac{dz}{ds}$, et l'on aura

$$\frac{x_1 - x}{p} = -\frac{dx}{ds}, \quad \frac{y_1 - y}{p} = -\frac{dy}{ds}, \quad \frac{z_1 - z}{p} = -\frac{dz}{ds},$$

d'où

$$(13) \qquad \begin{cases} x_1 = x - p\dfrac{dx}{ds}, \\ y_1 = y - p\dfrac{dy}{ds}, \\ z_1 = z - p\dfrac{dz}{ds}. \end{cases}$$

Si à la place de x, y, z et p on met leurs valeurs en fonction de t, données par les équations (3) et (12), et qu'on ait égard aux équations (7), les équations (13) deviennent

$$x_1 = \int u\,d\varphi - \left(\int \frac{d\varphi}{\cos\gamma} + K'\right)\cos\alpha + C,$$

$$y_1 = \int v\,d\varphi - \left(\int \frac{d\varphi}{\cos\gamma} + K'\right)\cos\beta + C',$$

$$z_1 = \varphi t - \left(\int \frac{d\varphi}{\cos\gamma} + K'\right)\cos\gamma,$$

et en éliminant t entre ces dernières équations, on tomberait sur deux équations en x_1, y_1, z_1, qui seraient celles de la ligne de courbure correspondante à la valeur particulière attribuée à K'.

4. Des équations (13) on déduit, par la différentiation,

$$dx_1 = dx - dp\frac{dx}{ds} - pd\frac{dx}{ds},$$

$$dy_1 = dy - dp\frac{dy}{ds} - pd\frac{dy}{ds},$$

$$dz_1 = dz - dp\frac{dz}{ds} - pd\frac{dz}{ds},$$

expressions qui se simplifient, en remarquant que $dp = ds$, et qui deviennent

$$(14)\quad \begin{cases} dx_1 = -\,pd\dfrac{dx}{ds}, \\ dy_1 = -\,pd\dfrac{dy}{ds}, \\ dz_1 = -\,pd\dfrac{dz}{ds}. \end{cases}$$

On en déduit

$$ds_1 = p\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2},$$

ou bien

$$(15)\qquad ds_1 = p\varepsilon,$$

d'où

$$s_1 = \int p\varepsilon + \mathrm{K}_1,$$

K_1 étant une contante arbitraire. Par cette dernière formule, on voit que la rectification des lignes de courbure dépend de deux quadratures successives, dont la première déterminerait p, comme le montre la formule (12), et dont la seconde déterminerait $\int p\varepsilon$.

On arrive, au reste, immédiatement à l'expression de ds_1, en considérant le triangle rectangle NM′N′, car ce triangle donne

$$\mathrm{NN'} \text{ ou } ds_1 = \mathrm{M'N'} \times \sin \mathrm{NM'N'},$$

et, en remplaçant M′N′ par $p + dp$, l'angle NM′N′ par ε, puis négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, on tombe visiblement sur la formule (15).

Des équations (14) et (15), on déduit

$$\frac{dx_1}{ds_1} = -\frac{1}{\varepsilon}d\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy_1}{ds_1} = -\frac{1}{\varepsilon}d\frac{dy}{ds},\quad \frac{dz_1}{ds_1} = -\frac{1}{\varepsilon}d\frac{dz}{ds},$$

ou bien

$$(16)\qquad \frac{dx_1}{ds_1} = -\cos\lambda,\quad \frac{dy_1}{ds_1} = -\cos\mu,\quad \frac{dz_1}{ds_1} = -\cos\nu.$$

On en conclut que la tangente de la ligne de courbure au point (x_1, y_1, z_1) est parallèle au rayon de courbure de la courbe AB au point correspondant (x, y, z). Dès lors l'angle de deux tangentes consécutives, ou l'angle de contingence de la première courbe, est égal à l'angle de deux rayons de courbure consécutifs de la seconde; comme on sait que ce dernier angle a pour valeur $\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}$, on aura la formule

$$(17)\qquad \varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon^2+\omega^2},$$

par suite,

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}},$$

ou bien

$$(18)\qquad \rho_1 = \frac{p\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}}.$$

5. Désignons par λ_1, μ_1, ν_1 les angles que fait avec les axes le rayon de courbure ρ_1; nous aurons

$$\cos\lambda_1 = \frac{\rho_1}{ds_1} d\frac{dx_1}{ds_1}, \quad \cos\mu_1 = \frac{\rho_1}{ds_1} d\frac{dy_1}{ds_1}, \quad \cos\nu_1 = \frac{\rho_1}{ds_1} d\frac{dz_1}{ds_1},$$

ou bien, en remplaçant $\frac{\rho_1}{ds_1}$ par $\frac{1}{\varepsilon_1}$, ou par $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}}$, et ayant égard aux formules (16),

$$(19)\qquad \begin{cases} \cos\lambda_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}}\, d\cos\lambda, \\ \cos\mu_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}}\, d\cos\mu, \\ \cos\nu_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}}\, d\cos\nu. \end{cases}$$

Comme $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ sont déterminés par les formules (8), on connaîtra par les formules (19) la direction du rayon de courbure de la courbe CD au point N, et nous allons en déduire l'angle que fait ce rayon avec la génératrice MN de la surface développable. Soit G le centre du cercle osculateur de CD au même point N : l'angle dont il

s'agit est l'angle GNM, que nous désignerons par i; nous aurons

$$\cos i = \cos\alpha\cos\lambda_1 + \cos\beta\cos\mu_1 + \cos\gamma\cos\nu_1.$$

ou bien, en substituant à $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ leurs valeurs,

$$\cos i = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}}(\cos\alpha\, d\cos\lambda + \cos\beta\, d\cos\mu + \cos\gamma\, d\cos\nu).$$

Mais en différentiant les équations (8), on forme les expressions

$$d\cos\lambda = \frac{1}{\varepsilon}d^2\cos\alpha - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}d\cos\alpha,$$

$$d\cos\mu = \frac{1}{\varepsilon}d^2\cos\beta - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}d\cos\beta,$$

$$d\cos\nu = \frac{1}{\varepsilon}d^2\cos\gamma - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}d\cos\gamma,$$

qui, substituées dans la précédente relation, donnent

$$\cos i = -\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}}(\cos\alpha\, d^2\cos\alpha + \cos\beta\, d^2\cos\beta + \cos\gamma\, d^2\cos\gamma)$$
$$+\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}}(\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma).$$

En outre, si l'on différentie deux fois de suite la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

on obtient ces deux autres

$$\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0,$$
$$\cos\alpha\, d^2\cos\alpha + \cos\beta\, d^2\cos\beta + \cos\gamma\, d^2\cos\gamma$$
$$+ (d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2 = 0,$$

dont la derniere revient à

$$\cos\alpha\, d^2\cos\alpha + \cos\beta\, d^2\cos\beta + \cos\gamma\, d^2\cos\gamma = -\varepsilon^2.$$

A l'aide de ces relations, on trouve que l'expression de $\cos i$ devient

$$(20)\qquad \cos i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}}.$$

Cette formule très-simple détermine la position du rayon de courbure NG dans le plan mené suivant la génératrice MN perpendiculairement au plan tangent NM′N′ de la surface développable.

On peut, au reste, la déduire immédiatement de la formule (18). Observons en effet que, la génératrice MN étant perpendiculaire à l'élément NN′, le plan normal à la ligne de courbure en N doit passer par cette génératrice; pareillement, le plan normal en N′ doit contenir la génératrice suivante M′N′. Dès lors l'intersection M′R de ces deux plans normaux consécutifs doit passer au point M′; et si du point N on mène une perpendiculaire sur M′R, le pied de cette perpendiculaire sera le centre G du cercle osculateur de la ligne CD en N. On forme ainsi un triangle rectangle M′NG, dans lequel on a

$$\text{M'N} = p + dp, \quad \text{NG} = \rho_1, \quad \text{l'angle M'NG} = i,$$

et qui donne

$$\cos i = \frac{\rho_1}{p},$$

aux infiniment petits près. Mettant pour ρ_1 sa valeur déterminée par la formule (18), on retombe visiblement sur la formule (20).

Remarquons que, la génératrice MN et le rayon de courbure NG étant perpendiculaires à l'élément NN′, il s'ensuit que l'angle MNG ou i mesure l'inclinaison du plan osculateur de la ligne de courbure sur le plan tangent correspondant de la surface développable, ou sur le plan osculateur de la courbe AB. La formule (20) détermine donc cette inclinaison, ou, ce qui revient au même, l'angle que fait chaque tangente MN de la courbe AB avec le plan osculateur correspondant de la ligne de courbure.

Remarquons encore que la formule (20) détermine aussi la position de l'intersection M′G de deux plans normaux consécutifs de la courbe CD, car l'angle GM′N que fait cette droite avec la génératrice M′N est le complément de l'angle i. Comme cette formule est indépendante de p, on en doit conclure qu'elle donne la même valeur pour l'angle GM′N, quelle que soit la position du point N sur la génératrice MN, c'est-à-dire pour toutes les lignes de courbure aux divers points où elles coupent cette droite; de sorte que l'intersection de deux plans

normaux consécutifs ou la génératrice de la surface polaire de la ligne de courbure, que détermine la formule (20), est la même, quelle que soit cette ligne. Nous arrivons donc à ce résultat, que les diverses lignes de courbure d'une surface développable ont la même surface polaire; la courbe AB est d'ailleurs située sur cette surface polaire.

6. L'angle de torsion ω_1 de la ligne de courbure peut s'obtenir très-simplement à l'aide d'une relation que nous avons donnée dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1[re] série, t. VIII, p. 386). Observons, en effet, que la courbe AB est une développée par rapport à la courbe CD; or la relation dont il s'agit est la suivante :

$$\omega = d \operatorname{arc} \sin \frac{\rho}{\rho_1},$$

dans laquelle ω et ρ désignent l'angle de torsion et le rayon de courbure de la développante, ρ_1 la quantité que nous avons représentée par p. Pour appliquer ici cette formule, nous n'avons donc qu'à y remplacer ω, ρ et ρ_1 par ω_1, ρ_1 et p, ce qui donne

$$\omega_1 = d \operatorname{arc} \sin \frac{\rho_1}{p},$$

ou bien, en mettant pour ρ_1 sa valeur,

$$\omega_1 = d \operatorname{arc} \sin \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}}. \tag{21}$$

Considérons la sphère osculatrice du troisième ordre de la ligne de courbure, et désignons par H la distance de son centre au plan osculateur de cette ligne en N; ce centre se trouve sur une perpendiculaire élevée au centre du cercle osculateur sur son plan, et est distant de ce dernier centre d'une quantité égale à H. Pour déterminer cette quantité, nous nous servirons d'une autre formule que nous avons donnée dans le même Mémoire (page 381), formule qui établit une relation entre l'angle de torsion d'une courbe quelconque, la différentielle de son rayon de courbure, et la distance du centre de la sphère osculatrice du troisième ordre au plan osculateur; en l'appliquant à la ligne de courbure, il vient

$$d\rho_1 = \mathrm{H}\omega_1.$$

Substituant à ρ_1 et ω_1 leurs valeurs données par les formules (18) et (21), nous avons

$$d\frac{p}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\varepsilon^2}}} = \mathrm{H} \times d \arc \sin \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\varepsilon^2}}},$$

ou bien, en effectuant les différentiations, et réduisant,

$$dp - \frac{p\frac{\omega}{\varepsilon}d\frac{\omega}{\varepsilon}}{1+\frac{\omega^2}{\varepsilon^2}} = -\mathrm{H} \times \frac{d\frac{\omega}{\varepsilon}}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\varepsilon^2}}},$$

d'où

$$(22) \qquad \mathrm{H} = \frac{p\omega}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}} - \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2} \cdot \frac{dp}{\varepsilon\, d\omega - \omega\, d\varepsilon}.$$

Il ne resterait plus qu'à mettre pour p et dp leurs valeurs données par les formules (11) et (12).

La distance H étant déterminée, on en déduit immédiatement le rayon R de la sphère osculatrice, car on a visiblement

$$\mathrm{R} = \sqrt{\rho_1^2 + \mathrm{H}^2},$$

formule dans laquelle il faudrait substituer à ρ_1 et H leurs valeurs données par les formules (18) et (22).

7. Considérons maintenant le lieu des centres de courbure de la surface développable dont AB est l'arête de rebroussement. Imaginons une autre surface développable qui serait le lieu des normales de la première, menées aux divers points d'une de ses lignes de courbure CD; les génératrices de la nouvelle surface sont visiblement coupées à angle droit par la même ligne de courbure, de sorte que cette ligne est à la fois une ligne de courbure de la nouvelle surface et de la première. Ainsi, l'arête de rebroussement A′B′ de la nouvelle surface est une développée de la ligne de courbure de la première, et, par conséquent, elle est située sur la surface polaire de cette ligne, laquelle surface est également la surface polaire de toutes les autres lignes de courbure. L'arête A′B′ étant le lieu des centres de courbure de la pre-

mière surface, relatifs aux divers points de la ligne de courbure CD, on est conduit, en étendant le résultat précédent à toutes les lignes de courbure, à conclure que le lieu des centres de courbure de la surface développable dont AB est l'arête de rebroussement, se confond avec la surface polaire commune à toutes les lignes de courbure de la même surface. On remarquera que AB étant une développée de CD, se trouve pareillement sur ce lieu des centres de courbure, et en est en même temps une ligne géodésique.

Les normales à la surface dont AB est l'arête de rebroussement, menées aux points N, N' de la ligne de courbure CD, doivent se couper en un certain point O situé sur l'intersection M'R de deux plans normaux consécutifs de cette ligne; de plus, la partie de normale NO est ce qu'on nomme le *rayon de courbure* de cette surface au point N, et ce rayon coïncide avec le rayon de courbure de la section principale, dont le plan passant par NN' est normal à la même surface; désignons cette longueur NO par q. L'angle des deux normales NO, N'O est égal à celui des plans tangents en N, N', lequel n'est autre chose que l'angle de torsion ω de la courbe AB. Dès lors, en considérant le secteur circulaire infiniment petit NON', on a

$$NN' \quad \text{ou} \quad ds_1 = q\omega,$$

ou bien, en vertu de la formule (15),

$$p\varepsilon = q\omega, \tag{23}$$

d'où, en mettant pour p sa valeur donnée par la formule (12),

$$q = \frac{\varepsilon}{\omega}(s + K').$$

On remarquera que la quantité q est, par rapport à l'arête de rebroussement A'B' de la surface développable passant par la courbe CD et normale à la première surface, ce qu'est la quantité p par rapport à l'arête AB de cette première surface; et de même que nous avons trouvé $p = s + K'$, nous trouverions

$$q = s_2 + K'',$$

en désignant par s_2 un arc de la nouvelle arête A′B′, compté à partir d'un point fixe et aboutissant au point O, par K″ une nouvelle constante arbitraire. Dès lors la formule (23) peut s'écrire ainsi :

$$\frac{s + \mathrm{K}'}{s_2 + \mathrm{K}''} = \frac{\omega}{\varepsilon};$$

les constantes K′, K″ doivent être déterminées de telle manière que, si l'on considère un point quelconque N de la courbe CD, on ait

$$s + \mathrm{K}' = \mathrm{NM}, \quad s_2 + \mathrm{K}'' = \mathrm{NO}.$$

Observons que la droite MN, se trouvant perpendiculaire à l'élément NN′ et à la droite NO, est normale à la nouvelle surface en N; pareillement, la droite M′N′ est normale à la même surface en N′. Comme ces deux normales se rencontrent en un point M′ de la courbe AB, et que le même résultat a lieu pour deux normales consécutives quelconques, menées en deux points infiniment voisins de la courbe CD, on voit que la courbe AB est le lieu des centres de courbure de la nouvelle surface développable, relatifs aux divers points de CD, et que la partie NM′ de la normale à la nouvelle surface en N est le rayon de courbure de la section principale de cette surface au même point N. La formule (23) montre donc que les rayons de courbure principaux p et q des deux surfaces développables, en un point quelconque N de leur intersection, sont entre eux dans le même rapport que les deux courbures de la courbe AB. Dès lors, en désignant par ε_2, ω_2 les angles de contingence et de torsion de la courbe A′B′, on aura pareillement

$$q\varepsilon_2 = p\omega_2,$$

relation qui, comparée à la formule (23), conduit à cette autre

$$\frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_2}{\omega_2}.$$

En outre, la formule (17) appliquée aux courbes CD, A′B′, donne

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\omega_2^2 + \varepsilon_2^2};$$

de cette relation et de la précédente, on déduit

$$\varepsilon_2 = \omega \cdot \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}}, \qquad \omega_2 = \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}},$$

et puisque $\varepsilon_1 = \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}$, on en conclut $\varepsilon_2 = \omega$, $\omega_2 = \varepsilon$, de sorte que les courbes AB, A′B′ sont telles, que l'angle de contingence de l'une est égal à l'angle de torsion de l'autre, et reciproquement. C'est, au reste, ce que montre immédiatement l'inspection de la figure; car, par exemple, l'angle de contingence ε_2 ou NON′ de la courbe A′B′ est égal à l'angle de deux plans tangents menés en N, N′ à la surface dont AB est l'arête de rebroussement; or ces plans ne sont autre chose que deux plans osculateurs consécutifs de la courbe AB, et, par conséquent, leur angle est égal à ω.

8. La courbe CD étant une ligne de courbure de la surface développable dont A′B′ est l'arête de rebroussement, on voit, en appliquant une des propriétés établies dans le paragraphe précédent, que le lieu des centres de courbure de cette surface se confond avec la surface polaire de sa ligne de courbure CD, laquelle surface est commune à cette ligne et à toutes les autres lignes de courbure. Il en résulte que le lieu des centres de courbure est le même pour les deux surfaces développables dont AB, A′B′ sont les arêtes de rebroussement.

Ce résultat n'est qu'un cas particulier d'un résultat plus général. Observons, en effet, que les courbes AB, A′B′ étant des développées de la courbe CD, sont aussi des lignes géodésiques par rapport à la surface polaire de cette dernière courbe; or on peut regarder cette surface comme une surface développable donnée, auquel cas AB serait une ligne géodésique quelconque de cette surface; on voit alors, en considérant la surface développable dont AB serait l'arête de rebroussement, que le lieu des centres de courbure de cette nouvelle surface ne serait autre chose que la surface développable donnée. Supposons, par exemple, que la surface donnée soit une surface cylindrique, ses lignes géodésiques seront des hélices, et les surfaces développables qui auront ces hélices pour arêtes de rebroussement, seront des hélicoïdes développables; donc le lieu des centres de courbure d'un hélicoïde développable est la surface cylindrique qui contient l'arête de rebrous-

sement de l'hélicoïde, et dont les génératrices sont coupées par cette courbe sous un angle constant.

Les droites MN, ON sont les tangentes des courbes géodésiques AB, A′B′ aux points M, O où ces courbes coupent une génératrice quelconque M′R de la surface qu'on s'est donnée; or ces tangentes se coupent évidemment à angle droit, et, par conséquent, elles font avec M′R des angles complémentaires NM′O, NOM′. Ces deux courbes sont donc telles que, l'une étant une ligne géodésique quelconque, l'autre se trouve déterminée de manière à couper chaque génératrice sous un angle complémentaire de celui sous lequel la première la coupe. Il en résulte que ces lignes géodésiques se coupent à angle droit, car en un point, qu'on leur suppose commun, passe une certaine génératrice, et ce point est celui où elles rencontrent cette génératrice, de sorte que les tangentes menées en ce point aux deux courbes sont perpendiculaires entre elles. Ces mêmes lignes sont les arêtes de rebroussement de deux surfaces développables qui se coupent à angle droit suivant une courbe CD qui est une ligne de courbure commune aux deux surfaces; de plus, les angles de contingence et de torsion de AB sont respectivement égaux aux angles de torsion et de contingence de A′B′.

Remarquons que, à une même ligne géodésique AB d'une surface développable, correspondent une infinité de lignes telles que A′B′, puisqu'il y a autant de courbes déterminées comme A′B′ qu'il y a de lignes de courbure telles que CD sur la surface développable dont AB est l'arête de rebroussement. Pareillement à la ligne géodésique A′B′, correspondent une infinité de lignes géodésiques telles que la courbe AB, et possédant les propriétés que nous avons reconnues à cette courbe. On peut dès lors imaginer que l'on ait tracé sur la surface donnée deux systèmes de lignes géodésiques, dont l'un comprendra toutes celles de l'espèce AB, et l'autre toutes celles de l'espèce A′B′: chaque ligne d'un quelconque de ces systèmes sera telle, que si on la prend pour arête de rebroussement d'une surface développable, toutes celles de l'autre système seront les lieux des centres de courbure de cette surface, relatifs à ses diverses lignes de courbure. Ces deux systèmes possèdent les propriétés suivantes: 1° aux points où deux lignes de ces systèmes coupent une même génératrice de la surface qui les contient, les tan-

gentes de ces lignes sont parallèles ou perpendiculaires, selon qu'elles appartiennent à un même système ou à des systèmes différents; 2° si deux lignes appartiennent à des systèmes différents, les angles de contingence et de torsion de l'une sont respectivement égaux aux angles de torsion et de contingence de l'autre; 3° une ligne quelconque d'un système coupe à angle droit toutes celles de l'autre système.

Cette dernière propriété appartient aussi, comme on sait, aux deux systèmes de lignes de courbure d'une surface quelconque; mais, tandis que le lieu des normales de la surface, menées aux divers points d'une ligne de courbure, forme une surface développable, il n'en est pas de même, en général, pour le lieu des normales passant aux divers points d'une ligne géodésique, car ces normales se confondent avec les rayons de courbure de cette ligne, qui est ordinairement à double courbure, et le lieu des rayons de courbure d'une courbe à double courbure est toujours une surface gauche. Les deux systèmes de lignes géodésiques d'une surface développable donnent donc lieu à deux systèmes correspondants de surfaces gauches, qui sont les lieux des normales passant aux divers points de chacune de ces lignes; et l'on voit que deux quelconques de ces surfaces gauches appartenant à des systèmes différents, se coupent suivant une normale commune, et que leurs plans tangents sont à angle droit au point d'intersection des lignes géodésiques qui leur servent de directrices.

NOMBRE DE SOLUTIONS
D'UNE CONGRUENCE DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES;

Par M. V.-A. LE BESGUE,
Correspondant de l'Institut.

Soit $p = hm + 1$ un nombre premier impair, g une racine primitive de p et $1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1} = 0$ (1). En posant $y_i = \sum x^{g^{km+i}}$, i étant un des nombres $0, 1, \ldots, m-1$ et k prenant les h valeurs $0, 1, 2, \ldots, h-1$, les m quantités $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ seront les racines de l'équation auxiliaire de degré m pour la résolution de l'équation (1). Cette auxiliaire se simplifiera si l'on pose $1 + my = z$.

Ceci rappelé, si l'on fait, pour abréger,

$$y_a y_b \cdots y_i + y_{a+1} y_{b+1} \cdots y_{i+1} + \ldots + y_{a+m-1} y_{b+m-1} \cdots y_{i+m-1} = \mathrm{T}(y_a y_b \cdots y_i),$$

on verra par la méthode exposée pages 287 et suivantes du tome II de la 1re série du *Journal de Mathématiques*, que les deux congruences à k inconnues

$$(a)\ g^b x_1^m + g^c x_2^m + \ldots + g^l x_k^m \equiv 0, \quad (b)\ g^a + g^b x_1^m + \ldots + g^l x_k^m \equiv 0 \ (\text{mod. } p = hm + 1),$$

ont leur nombre de solutions S_k déterminé respectivement par les équations

$$(a')\ p\mathrm{S}_k = p^k + \frac{p-1}{m}\mathrm{T}(z_b z_c \ldots z_i), \quad (b')\ p\mathrm{S}_k = p^k + \frac{1}{m}[\mathrm{T}(z_a z_b \ldots z_i) - \mathrm{T}(z_b z_c \ldots z_i)],$$

si $x_1, x_2, \ldots, x_k$, nombres positifs inférieurs à p, peuvent être supposés nuls, et par les équations

$$(a'')\ p\mathrm{S}_k = (p-1)^k + \frac{p-1}{m} m^k \mathrm{T}(y_b y_c \cdots y_i), \quad (b'')\ p\mathrm{S}_k = (p-1)^k + m^k \mathrm{T}(y_a y_b \cdots y_i),$$

si $x_1, x_2, \ldots, x_k$ doivent tomber entre 0 et p.

Pour $m = 1$, on a $z_i = 0$, $y_i = -1$ et l'on trouve pour S_k les quatre nombres

$$p^{k-1}, \ p^{k-1}, \ \frac{1}{p}(p-1)[(p-1)^{k-1} - (-1)^{k-1}], \ \frac{1}{p}[(p-1)^k - (-1)^k].$$

Ces nombres sont indépendants des coefficients des congruences (a), (b). Il serait facile de donner *a priori* la raison de cette indépendance.

SUR

LE CARACTÈRE BIQUADRATIQUE DU NOMBRE 2.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. DIRICHLET A M. STERN.

(TRADUCTION DE M. HOUEL.)

Soit p un nombre premier de la forme $4n+1$, et

$$p = a^2 + b^2,$$

a étant impair. De cette équation et de la suivante

$$2p = (a+b)^2 + (a-b)^2,$$

on tire immédiatement, en faisant usage du symbole de Legendre généralisé,

$$\left(\frac{p}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{2p}{a+b}\right) = 1 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p}{a+b}\right) = \left(\frac{2}{a+b}\right),$$

d'où, ensuite, par des théorèmes connus,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{a+b}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}[(a+b)^2-1]},$$

ou, ce qui revient au même,

$$a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1, \quad (a+b)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv (-1)^{\frac{1}{8}[(a+b)^2-1]} \quad (\text{mod. } p).$$

D'autre part, de la relation

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \equiv 2ab \quad (\text{mod. } p),$$

on tire, en élevant à la puissance $\frac{1}{4}(p-1)$,

$$(a+b)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 2^{\frac{1}{4}(p-1)} . a^{\frac{1}{4}(p-1)} . b^{\frac{1}{4}(p-1)} \pmod{p},$$

ou, en posant

$$b \equiv af,$$

et ayant égard aux deux dernières congruences,

$$(-1)^{\frac{1}{8}[(a+b)^2-1]} = (-1)^{\frac{1}{8}(p-1+2ab)} \equiv 2^{\frac{1}{4}(p-1)} . f^{\frac{1}{4}(p-1)} \pmod{p}.$$

Mais à cause de

$$a^2+b^2=p, \quad b^2 \equiv a^2 f^2,$$

on a

$$f^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

d'ou

$$(f^2)^{\frac{1}{8}(p-1+2ab)} = f^{\frac{1}{4}(p-1)} . f^{\frac{1}{2}ab} \equiv 2^{\frac{1}{4}(p-1)} . f^{\frac{1}{4}(p-1)} \pmod{p} :$$

en divisant par $f^{\frac{1}{4}(p-1)}$, on a donc enfin

$$2^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv f^{\frac{1}{2}ab} \pmod{p},$$

résultat qui se transforme dans celui que Gauss a donné au § 24 de sa *Theoria residuorum biquadraticorum,* lorsqu'on multiplie par $a^{\frac{1}{2}ab}$ et que l'on remplace de nouveau af par b.

Gottingue, le 21 janvier 1857.

NOUVELLE THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

DEUXIÈME PARTIE.

DES PÉRIODES DES INTÉGRALES.

(Suite).

CHAPITRE V.

Des périodes des intégrales d'ordre quelconque.

55. On peut généraliser les théorèmes que nous avons établis dans les deux chapitres précédents, et les étendre aux intégrales d'ordre quelconque.

Mais nous devons d'abord expliquer le sens de quelques mots nouveaux que nous serons obligés d'employer.

La géométrie ne fournissant pas de moyens de figurer les solutions qui peuvent convenir à une équation

$$f(x, y, z, \ldots, t, u, v) = 0,$$

contenant plus de trois variables, nous désignerons, pour abréger, sous le nom de *champ* réel de l'équation, l'ensemble de ses solutions réelles, et, par champs imaginaires, les ensembles de ses solutions imaginaires groupées convenablement.

Toute équation aura un champ réel et une infinité de champs imaginaires conjugués, chacun de ces derniers comprenant toutes les solutions de l'équation proposée où les parties imaginaires de $x, y, z, \ldots, t, u, v$ seraient comme des nombres constants $C_1, C_2, \ldots, C_n$, 1.

Les solutions appartenant à un même champ imaginaire conjugué seront donc de la forme

$$x = \alpha_1 + C_1 \beta \sqrt{-1},$$
$$y = \alpha_2 + C_2 \beta \sqrt{-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$u = \alpha_n + C_n \beta \sqrt{-1},$$
$$v = \alpha + \beta \sqrt{-1}.$$

Les $n+2$ variables $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \alpha$ et β étant liées entre elles par les deux équations dans lesquelles se décompose l'équation $f = 0$, l'indétermination dans chaque groupe de solutions imaginaires, appartenant à un même champ conjugué, sera de l'ordre n, comme dans le groupe des solutions réelles.

34. Les solutions appartenant à un même champ imaginaire conjugué pourraient, d'une infinité de manières différentes, être rendues réelles par rapport à toutes les variables moins une, au moyen de transformations linéaires.

La plus simple de ces transformations consiste à substituer à $x, y, z, \ldots, t, u$ les variables définies par les équations

$$x' = x - C_1 v,$$
$$y' = y - C_2 v,$$
$$z' = z - C_3 v,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$u' = u - C_n v.$$

Le champ imaginaire par rapport à v seulement de l'équation

$$f(x' + C_1 v, y' + C_2 v, \ldots, u' + C_n v, v) = 0,$$

remplacerait le champ imaginaire $[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ de l'équation

$$f(x, y, z, \ldots, t, u, v) = 0.$$

35. Le champ imaginaire, par rapport à v seulement, de l'équation

$$f(x, y, z, \ldots, t, u, v) = 0,$$

touche le champ réel de la même équation par les solutions réelles communes aux équations

$$f = 0, \quad f'_v = 0.$$

Le groupe des solutions communes au champ réel et à tout autre champ imaginaire conjugué sera, au moyen de la transformation précédente, tout aussi facile à obtenir.

Le champ imaginaire conjugué $[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ touchera évidemment le champ réel par les solutions correspondantes aux solutions réelles communes aux deux équations

$$f(x' + C_1 v,\ y' + C_2 v, \ldots, u' + C_n v, v) = 0$$

et

$$C_1 f'_x(x' + C_1 v, \ldots) + C_2 f'_y(x' + C_1 v, \ldots) + \ldots + f'_v(x' + C_1 v, \ldots) = 0.$$

Pour un champ imaginaire par rapport à u et v seulement, ces équations deviendraient

$$f(x, y, \ldots, t, u' + C_n v, v) = 0$$

et

$$C_n f'_u(x, y, \ldots, t, u' + C_n v, v) + f'_v(x, y, \ldots, t, u' + C_n v, v) = 0.$$

56. Si l'on ne considère d'abord que les solutions réelles d'une équation

$$f(x, y, z, \ldots, s, t, u, v) = 0,$$

l'intégrale

$$\sum_n v \, . \, dx \, . \, dy \, . \, dz \ldots . \, dt \, . \, du$$

pourra immédiatement se mettre sous la forme

$$\int dx \int dy \int dz \ldots \int dt \int v \, du.$$

Si d'ailleurs le champ réel en question étant supposé fini, continu et unique, on veut étendre l'intégrale à tout ce champ, comme les valeurs de u et de v qui correspondront à un système de valeurs choisies pour $x, y, z, \ldots, t$, formeront elles-mêmes un lieu fermé, on

prendra l'intégrale $\int v\,du$ pour le contour entier de ce lieu, c'est-à-dire, par exemple, entre les limites déterminées par $f'_v = 0$; en substituant, bien entendu, à v la différence de ses deux valeurs.

L'intégrale obtenue, qui sera une fonction de x, y, z,..., s, t, étant désignée par v_1, on prendra ensuite l'intégrale $\int v_1\,dt$ entre les limites pour lesquelles v_1 serait nul.

La nouvelle intégrale obtenue, qui sera une fonction de $x, y, z,..., s$, étant désignée par v_2, on prendra de même l'intégrale $\int v_2\,ds$ entre les limites pour lesquelles v_2 serait nul.

Et l'on continuera ainsi jusqu'au bout.

Il n'y a pas lieu de poser la question de savoir si l'intégrale serait restée la même, l'ordre des intégrations venant à changer d'une manière quelconque; le résultat définitif sera toujours le même, parce qu'en fait ce sera toujours la même grandeur concrète qu'on aura calculée.

57. Supposons maintenant qu'au lieu d'un champ, réel fini, continu et unique, associé à une infinité de champs imaginaires conjugués, sans limites, l'équation $f = 0$ comporte un champ réel illimité et une infinité de champs imaginaires conjugués, limités de toutes parts, et occupons-nous d'abord de celui dont le v seulement serait imaginaire; l'intégrale

$$\sum_{n} v\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz\,.....\,ds\,.\,dt\,.\,du,$$

étendue à tout ce champ, pourra se ramener encore immédiatement à des intégrales superposées, et les limites des intégrations partielles devront être déterminées par le groupe correspondant à l'ordre adopté, des équations à zéro des intégrales successives.

Or la propriété, dont jouit l'intégrale étendue à tout le champ réel, de conserver la même valeur, dans quelque ordre qu'on superpose les intégrations partielles, dépend essentiellement de la nature des équations qui déterminent les limites de ces intégrations.

Ces équations restant les mêmes pour le champ imaginaire dont nous

parlons, que pour le champ réel, l'ordre des intégrations pourra donc encore être interverti à volonté.

58. Si l'on voulait obtenir l'intégrale

$$\sum_n v.dx.dy.dz.....dt.du,$$

étendue à tout un champ conjugué quelconque $[C, C_1 C_2, \ldots, C_n]$, on pourrait substituer à $x, y, z, \ldots, t, u$ les variables réelles $x', y', \ldots, t'. u'$ définies par les relations

$$x' = x - C_1 v,$$
$$y' = y - C_2 v,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$t' = t - C_{n-1} v,$$
$$u' = u - C_n v;$$

et l'on formerait, au moyen de la règle donnée par M. Jacobi, la fonction de $x', y', z', \ldots, t', u'$, qu'on devrait placer sous le signe $\int$ dans la nouvelle intégrale.

Cette nouvelle intégrale se ramènerait immédiatement à des intégrations séparées, qu'on pourrait superposer dans un ordre complétement arbitraire.

59. L'intégrale

$$\sum_n v.dx.dy.dz.....dt.du,$$

étendue à tout un champ imaginaire conjugué, est toujours imaginaire, sans partie réelle, lorsque l'équation qui définit v est algébrique et entière, parce qu'à un système de valeurs

$$x = \alpha_1 + \beta C_1 \sqrt{-1},$$
$$y = \alpha_2 + \beta C_2 \sqrt{-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u = \alpha_n + \beta C_n \sqrt{-1},$$
$$v = \alpha + \beta' \sqrt{-1},$$

correspond, dans le même champ, son conjugué

$$x = \alpha_1 - \beta C_1 \sqrt{-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v = \alpha - \beta \quad \sqrt{-1},$$

et qu'au système de différentielles

$$dx = d\alpha_1 + d\beta . C_1 \sqrt{-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$du = d\alpha_n + d\beta . C_n \sqrt{-1},$$

correspond aussi, dans le même champ, son conjugué

$$dx = d\alpha_1 - d\beta . C_1 \sqrt{-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$du = d\alpha_n - d\beta . C_n \sqrt{-1}.$$

60. Arrivons maintenant au théorème qui fait l'objet principal de ce chapitre.

Si l'équation

$$f(x, y, z, \ldots, u, v) = 0$$

admet une infinité de champs conjugués continus et fermés, l'intégrale

$$\int_n v . dx . dy \ldots . dt . du$$

aura la même valeur, quel que soit celui de ces champs par rapport auquel on la forme; et cette valeur constante sera, en conséquence, une des périodes imaginaires de l'intégrale.

Nous avons vu, dans le chapitre III, que quel que soit le chemin fermé qu'on fasse suivre à un point $[xy]$, pourvu que ce chemin ait touché successivement deux branches voisines de la courbe réelle, dont l'équation doit rester satisfaite par ses coordonnées, l'intégrale $\int y\,dx$ prend pour valeur l'aire constante d'un quelconque des anneaux conjugués compris entre ces deux branches.

L'arbitraire dans le choix du chemin s'est de nouveau accru lorsqu'il s'est agi, dans le chapitre IV, des intégrales doubles, et il augmentera bien davantage encore, s'il s'agit d'intégrales d'ordre supérieur.

Mais nous restreindrons l'énoncé du théorème au cas où l'on prendrait toutes les valeurs des variables dans un même champ conjugué, d'ailleurs quelconque, parce qu'alors le fait acquerra, comme dans les chapitres précédents, une signification concrète, et, par suite, une importance plus grande; l'intégrale

$$\sum_n v \, . \, dx \, . \, dy \ldots\ldots dt \, . \, du,$$

représentant alors, par rapport au champ imaginaire considéré, la même grandeur concrète qu'elle représenterait par rapport au champ réel.

61. L'intégrale, relative au champ imaginaire par rapport à v seulement, peut s'écrire

$$\int dx \cdot \int dy \, . \int dz \ldots\ldots \int dt \, . \int v \, . \, du;$$

mais nous savons, d'après ce qui a été dit des intégrales simples, que la première des intégrales superposées dans cette formule, $\int v \, . \, du$, calculée comme si $x, y, \ldots, t$ étaient des paramètres, aura toujours la même valeur, quelle que soit la conjuguée de la courbe $[v, u]$ que l'on suive, au lieu de celle dont les u sont réels; on voit donc déjà qu'au champ imaginaire, par rapport à v seulement, on peut substituer un quelconque des champs imaginaires par rapport à v et à u, sans que l'intégrale complète en éprouve d'altération; et comme on aurait pu changer arbitrairement l'ordre des intégrations superposées, tant qu'il ne s'agissait que du champ imaginaire par rapport à v seulement, on voit également qu'on pourrait substituer à ce champ tout autre champ imaginaire par rapport à v et à une quelconque des autres variables.

Pour démontrer le théorème dans toute sa généralité, nous définirons, autrement que nous ne l'avons supposé jusqu'ici, les variables réelles qui doivent être substituées aux variables imaginaires.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les caractéristiques du champ considéré que nous voulons comparer au champ imaginaire par rapport à v seule-

ment; si nous posons

$$x' = x - \frac{C_1}{C_2} y,$$

$$y' = y - \frac{C^2}{C_3} z,$$

$$\cdots\cdots$$

$$t' = t - \frac{C_{n-1}}{C_n} u;$$

x', y', z', .., t' seront réels, soit que les valeurs de x, y, z,..., t, u soient prises dans un champ ou dans l'autre; en d'autres termes, la transformation étant faite et l'intégrale étant ramenée à la forme

$$\int dx' \int dy' \int dz' \ldots\ldots \int dt' \int du \,.\, F_1(x', y', \ldots, t', u);$$

elle se rapportera au champ [o, o, o,..., o], si l'on ne donne à u que des valeurs réelles, et au champ [C_1, C_2,..., C_n], si l'on donne à u des valeurs imaginaires convenablement choisies : or, elle aura la même valeur dans les deux cas, si les limites de toutes les intégrations successives sont ce qu'elles doivent être quand il s'agit d'un champ fermé et d'une intégrale complète.

62. *Remarque.* Si l'on faisait complétement la transformation des variables pour un champ [C_1, C_2,..., C_n], l'intégrale

$$\sum_n F(x, y, z, \ldots, t, u)\, dx \,.\, dy \ldots dt \,.\, du,$$

correspondante à ce champ, en supposant qu'on eût employé, pour faire la transformation, les formules

$$x' = x - \frac{C_1}{C_2} y,$$

$$y = y - \frac{C_2}{C_3} z,$$

$$\cdots\cdots$$

$$t' = t - \frac{C_{n-1}}{C_n} u,$$

$$u' = u,$$

deviendrait, si $F_1(x', y', z', \ldots, t', u')$ désignait le résultat de la substitution dans $F(x, y, z, \ldots, t, u)$ des valeurs de x, y, z,..., t, u tirées des

équations précédentes en fonction de $x', y', z', \ldots, t', u'$ et D le déterminant

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{dx'}{dx}, & \frac{dx'}{dy}, & \frac{dx'}{dz}, \ldots, & \frac{dx'}{dt}, & \frac{dx'}{du}, \\
\frac{dy'}{dx}, & \frac{dy'}{dy}, & \frac{dy'}{dz}, \ldots, & \frac{dy'}{dt}, & \frac{dy'}{du}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{dt'}{dx}, & \frac{dt'}{dy}, & \frac{dt'}{dz}, \ldots, & \frac{dt'}{dt}, & \frac{dt'}{du}, \\
\frac{du'}{dx}, & \frac{du'}{dy}, & \frac{du'}{dz}, \ldots, & \frac{du'}{dt}, & \frac{du'}{du};
\end{array}$$

cette intégrale, disons-nous, deviendrait

$$\sum_n F_1(x' y', \ldots, t' u') \frac{dx'.dy'.\ldots.dt'.du'}{D}.$$

Or le déterminant D, dans ce cas, serait

1	$-\frac{C_1}{C_2}$	0	0	.....	0	0
0	1	$-\frac{C_2}{C_3}$	0	.....	0	0
0	0	1	$-\frac{C_3}{C_4}$	.....	0	0
0	0	0	1	.....		0
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
0	0	0	0	.....	1	$-\frac{C_{n-1}}{C_n}$
0	0	0	0	.....	0	1

c'est-à-dire 1.

L'intégrale se réduirait donc à

$$\sum_n F_1(x', y', \ldots, t', u')\, dx'.dy'.dz', \ldots, dt'.du'.$$

La transformation n'affecterait donc pas essentiellement la fonction placée sous le signe $\sum$, et c'est pourquoi nous avons pu dire que l'intégrale représenterait, relativement, la même grandeur, soit qu'elle fût prise pour le champ réel ou pour un champ conjugué quelconque.

65. Le théorème que nous avions en vue est donc complétement établi; mais l'intégrale reprendrait encore la même valeur si, à l'un des champs conjugués on substituait tout autre champ fermé, défini comme on voudrait, pourvu qu'il touchât le champ réel par des solutions appartenant à un système où l'indétermination fût de l'ordre $n - 1$.

En effet, à l'intégrale

$$\int dx \int dy \int dz \ldots\ldots \int dt \int F(x, y, \ldots, t, u)\, du,$$

dont les éléments correspondraient à des valeurs réelles de $x, y, \ldots, t, u$, on pourrait substituer celle dont les éléments correspondraient à des valeurs réelles de $x, y, z, \ldots, t$, et à des valeurs imaginaires quelconques de u, pourvu que le chemin suivi par le point $[u, F]$ fût fermé et touchât sur ses deux branches la courbe réelle $[u, F]$; de même, désignant par F_1 l'intégrale

$$\int F(x, y, \ldots, t, u)\, du,$$

dont on vient de supposer la valeur obtenue, on pourrait substituer à la suivante

$$\int dx \int dy \int dz \ldots\ldots \int dt\, F_1,$$

dont les éléments correspondraient à des valeurs réelles de $x, y, z, \ldots, t$, celle dont les éléments correspondraient à des valeurs réelles de $x, y, z, \ldots, s$, et à des valeurs imaginaires quelconques de t, pourvu

que le chemin suivi par le point $[t F_1]$ fût fermé et touchât sur ses deux branches la courbe réelle $[t F_1]$; et ainsi de suite.

64. Nous n'avons nullement supposé, dans tout ce qui précède, que la fonction placée sous le signe $\int$ fût donnée explicitement; la même théorie s'appliquera donc aux intégrales des équations aux différentielles partielles qu'on peut ramener à la forme

$$f\left(x, y, z, \ldots, \frac{d^n F}{dx\, dy\, dz \ldots}\right) = 0.$$

Si, en particulier, la fonction ne dépend que de deux variables, et que, par suite, l'équation différentielle ait la forme

$$f\left(x, y, \frac{d^2 F}{dx\, dy}\right) = 0,$$

l'intégrale générale d'une pareille équation aura toujours pour périodes réelles les mesures des volumes enveloppés par les différentes nappes fermées de la surface réelle représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

et pour périodes imaginaires, les mesures des volumes compris dans l'intérieur des conjuguées fermées, de différentes catégories, de la même surface.

Cela signifie que dans l'équation intégrale

$$\varphi(x, y, F) = 0,$$

on pourra augmenter la fonction F d'une somme de multiples entiers quelconques de ces périodes, sans que cette addition change la relation qui lierait x et y après que F aurait été choisi.

Lorsque l'intégrale n'aura que deux périodes ω et ω', l'une réelle, l'autre imaginaire, l'équation

$$\varphi(x, y, F) = 0$$

pourra être formulée : on ne pourra évidemment pas la résoudre par

rapport à F; mais si l'on parvient à y isoler cette variable, l'équation intégrale aura la forme

$$F_1(x, y) = \psi(F),$$

ψ désignant une fonction doublement périodique, mais F_1 pouvant représenter même une fonction algébrique élémentaire.

65. Nous prendrons pour exemple l'intégrale double

$$\int dy \int dx \sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}},$$

qui donne l'aire de l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La même intégrale, multipliée par c, représenterait le volume indéfini compris entre le plan des xy et la surface

$$\frac{z}{c} = \sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}}.$$

Le contour apparent de cette surface est formé des deux ellipses

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1 = 0$$

et

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0:$$

la première est entourée par la seconde, par conséquent la surface réelle se projette dans l'intérieur de la première et au dehors de la seconde; elle se compose donc d'une nappe fermée de toutes parts, comprise entre les plans $z = \pm c$ et le cylindre

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1 = 0,$$

et d'une nappe indéfinie asymptotique au cylindre

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

qui tombe ensuite comme en forme de rideau pour s'épanouir parallèlement au plan des xy, en s'appuyant à l'infini sur le conoïde

$$y = mx,$$

$$z = c\sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^4} + \frac{b^2+c^2}{b^4}m^2}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}m^2}},$$

qui en forme la seconde asymptote.

La conjuguée à abscisses et à ordonnées réelles touche, sur le plan des xy, le cylindre

$$\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1 = 0,$$

et est asymptotique au cylindre

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Les autres conjuguées sont des anneaux compris entre les deux nappes de la surface réelle.

L'intégrale

$$c\int dy \int dx \sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2 + \frac{b^2+c^2}{b^4}y^2 - 1}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}}$$

aura pour période réelle le volume compris dans l'intérieur de la nappe fermée de la surface réelle, et pour période imaginaire le volume compris dans l'intérieur d'une conjuguée quelconque, ou entre la conjuguée dont les z seuls sont imaginaires et le cylindre asymptotique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

66. *Quadrature de l'enveloppe imaginaire.* — La quadrature des surfaces imaginaires donne lieu à des remarques analogues à celles que nous avons présentées à propos de la rectification des courbes imaginaires; toutefois, ce que nous pouvions affirmer alors d'une manière générale, ne se reproduira plus que dans des cas particuliers.

Quand le point $[x, y, z]$ se déplace sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées, parallèlement aux plans des xz ou des yz, les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ sont réelles, de sorte que le cosinus de l'angle formé avec le plan des xy par le plan tangent à cette enveloppe, au point $[xyz]$, est encore exprimé par la formule

$$\frac{f'z}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2}};$$

mais $dx.dy$ ne représente généralement plus alors la projection sur le plan des xy d'un élément superficiel de l'enveloppe, de sorte que l'intégrale

$$\int\int dx.dy \cdot \frac{f'z}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2}},$$

prise entre des limites appartenant à l'enveloppe imaginaire, ne fournit généralement pas l'aire de cette enveloppe.

Cependant, pour les mêmes raisons que nous avons données en géométrie plane, les coordonnées x, y, z des différents points de l'enveloppe seront fréquemment imaginaires, sans parties réelles, ou, ce qui revient au même, composées de parties réelles constantes et de parties imaginaires seules variables.

Dans ce cas, x, y, z ayant ou pouvant recevoir la forme

$$x = \beta \sqrt{-1},$$
$$y = \beta' \sqrt{-1},$$
$$z = \beta'' \sqrt{-1},$$

$dx.dy = -d\beta.d\beta'$ et représente, au signe près, la projection d'un élément superficiel de l'enveloppe, de sorte que l'intégrale

$$\int\int dx.dy \cdot \frac{f'z}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2}}$$

convient bien alors à l'expression de l'aire indéfinie de cette enveloppe.

Ainsi, si nous prenons pour exemple l'équation de l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

l'enveloppe imaginaire sera l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

dont les points seront fournis par les solutions de la forme

$$x=\beta\sqrt{-1},\quad y=\beta'\sqrt{-1},\quad z=\beta''\sqrt{-1},$$

de l'équation proposée : l'intégrale double

$$\int\int dx\,dy\sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^4}x^2+\frac{b^2+c^2}{b^4}y^2-1}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}},$$

pourvu qu'on en détermine convenablement les limites, fournira donc également bien les aires de l'une et de l'autre des deux enveloppes, seulement la seconde aire sera affectée du signe contraire à celui qu'elle devrait avoir d'après le sens dans lequel elle aurait été engendrée.

67. J'ai cherché vainement une interprétation des périodes de l'intégrale double que je viens de prendre pour exemple ; mais comme, pour y parvenir, j'étudiais de nouveau l'intégrale simple qui donne l'arc indéfini d'une hyperbole, j'ai trouvé de sa période réelle une interprétation tout aussi simple que celle que j'ai donnée dans le chapitre III de sa période imaginaire.

Le résultat où je suis parvenu pouvant servir à l'interprétation des périodes de l'intégrale double, je le rapporterai ici.

Les solutions de l'équation

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2,$$

qui fournissent les points des conjuguées dont les caractéristiques sont

$\pm \frac{b}{a}$, conjuguées qui se confondent avec les asymptotes, sont de la forme

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' \pm \beta \frac{b}{a}\sqrt{-1},$$

et doivent satisfaire aux conditions

$$a^2\alpha'^2 - b^2\alpha^2 = -a^2b^2$$

et

$$a\alpha' \pm b\alpha = 0,$$

qui exigent que α et α' restent infinis et conservent entre eux un rapport $\frac{\alpha'}{\alpha} = \pm \frac{b}{a}$: et laissent β complétement arbitraire.

J'avais obtenu la période imaginaire de l'intégrale

$$\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

relative à l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

en faisant parcourir au point $[xy]$ le chemin fermé composé des deux asymptotes et des deux branches de l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2,$$

considérée comme fournie par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \quad x = \beta'\sqrt{-1}$$

de l'équation proposée

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2;$$

je déplaçais alors le point $[xy]$ sur les asymptotes, en laissant α et α' infinis, mais constants, et faisant varier β : dans ces conditions, la portion engendrée de l'intégrale indéfinie

$$\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

était imaginaire, sans partie réelle, et représentait la longueur du chemin décrit sur l'asymptote; en même temps la portion de la même intégrale engendrée par le déplacement du point $[xy]$ sur l'hyperbole conjuguée de la proposée représentait, sous la même forme imaginaire sans partie réelle, le chemin parcouru sur cette hyperbole conjuguée.

La période imaginaire de l'intégrale se trouvait donc complète lorsque le tour entier était achevé; cette période, abstraction faite du signe $\sqrt{-1}$, représentait la différence des longueurs totales des asymptotes et de l'hyperbole conjuguée.

La période réelle s'interprète exactement de la même manière; en effet, pour déplacer le point $[xy]$ sur l'asymptote, on peut aussi bien faire varier α et α', en laissant β constant; alors dx est réel, et par conséquent la portion engendrée de l'intégrale

$$\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

l'est aussi, et si l'on transporte le point $[xy]$, parvenu à l'infini, de l'asymptote sur l'hyperbole proposée, l'intégrale continue de croître par valeurs réelles; la période réelle est donc complète quand le tour entier est achevé, et cette période doit être la différence des longueurs totales des asymptotes et de l'hyperbole proposée.

Il est facile de lever tous les doutes à cet égard; il ne s'agira pour cela que de vérifier que les intégrales qui serviraient à rectifier les deux hyperboles, considérées comme réelles, ont les mêmes périodes changées de réelles en imaginaires, et réciproquement. Or ces intégrales sont

$$\frac{1}{a}\int dx\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{x^2-a^2}}$$

et

$$\frac{1}{a}\int dx\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2+a^4}{x^2+a^2}};$$

si l'on y fait abstraction du facteur $\frac{1}{a}$, elles représentent les aires des courbes

$$y^2=\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{x^2-a^2}$$

et

$$y^2 = \frac{(a^2+b^2)x^2+a^2}{x^2+a^2}:$$

mais, d'après notre théorie des quadratures, les intégrales

$$\int y\,dx$$

et

$$\int x\,dy$$

se rapportant à la même courbe, ont les mêmes périodes; et comme les équations précédentes donnent

$$x^2 = \frac{a^2y^2-a^4}{y^2-a^2-b^2}$$

et

$$x^2 = \frac{a^2y^2-a^4}{a^2+b^2-y^2},$$

les périodes des intégrales proposées sont donc respectivement égales à celles des intégrales

$$\int dy\sqrt{\frac{y^2-a^2}{y^2-a^2-b^2}}$$

et

$$\int dy\sqrt{\frac{y^2-a^2}{a^2+b^2-y^2}}.$$

Or l'une de ces deux dernières se forme de l'autre multipliée par $\sqrt{-1}$; elles ont donc les mêmes périodes changées de réelles en imaginaires, et réciproquement.

Quant aux périodes de l'intégrale double, comme je l'ai dit plus haut, je n'ai pu découvrir le rapport qu'elles doivent avoir à la question même de quadrature qui avait donné naissance à l'intégrale. Il semblerait qu'elles dussent pouvoir s'exprimer par des différences des aires illimitées des hyperboloïdes représentés par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et des aires des cônes représentés par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,;$$

mais ces différences, ou du moins celles que j'ai calculées, se trouvent être infinies.

S'il ne s'agissait que d'expliquer, par les conditions mêmes du calcul soit de l'arc de l'hyperbole, soit de l'aire de l'hyperboloïde, la présence des périodes dans l'intégrale, ce serait facile.

En effet le point $[xy]$ assujetti à rester sur le lieu

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2,$$

décrivant la conjuguée $C=\infty$ de ce lieu, c'est-à-dire l'éllipse

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ resterait imaginaire sans partie réelle;

$$dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

serait donc réel ou imaginaire selon que $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ serait, en valeur absolue, moindre que 1 ou plus grand que 1.

D'autre part, le coefficient angulaire d'une droite représentée, dans le système $C=\infty$, par une équation

$$y=n\sqrt{-1}\,x+p+q\sqrt{-1},$$

est n; la valeur absolue de $\frac{dy}{dx}$ progresserait donc comme le coefficient angulaire de la tangente au lieu parcouru.

Ainsi les éléments de l'intégrale

$$\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

resteraient réels de $x=0$ à l'abscisse

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{e}$$

du point où le coefficient angulaire de la tangente à l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

est 1, et deviendraient imaginaires de $x = \frac{a}{e}$ à $x = a$.

Le point $[xy]$ parcourant donc l'ellipse entière, l'intégrale acquerrait la valeur

$$4\int_0^{\frac{a}{e}} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + 4\int_{\frac{a}{e}}^{a} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Cette somme devait donc former une période de l'intégrale.

L'intégrale double donnerait lieu à des remarques analogues, mais il n'en résulte aucun théorème intéressant de géométrie.

DE

LA COMPOSITION DES FORMES BINAIRES DU SECOND DEGRÉ [*];

PAR M. G. LEJEUNE-DIRICHLET.

M'étant proposé, il y a déjà plusieurs années, la détermination du nombre de classes des formes binaires du second degré, qui répondent à un même déterminant, et voulant l'étendre à la théorie des nombres complexes, j'ai dû reprendre entièrement les éléments de la théorie des formes, qui n'avaient été développés que pour le cas des nombres entiers réels. J'ai réussi à présenter complétement en peu de pages les éléments de cette théorie, en me servant de considérations non encore employées, et qui s'appliquent aussi bien aux entiers complexes qu'aux entiers réels [**].

---

[*] Ce Mémoire se trouve dans le t. XLVII du Journal de Crelle. Voici le titre exact, un peu altéré dans la traduction :

De formarum binariarum secundi gradus compositione, auct. G. LEJEUNE-DIRICHLET, *commentatio mense Maio an.* 1851 *ad actum quemdam academicum in Univ. Litterarum reg. Berol. celebrandum, typis expressa et distributa.*

J'ai cru devoir traduire littéralement un Mémoire qui, comme les autres du même auteur, a le mérite assez rare de contenir ce qui est nécessaire et rien de plus. Seulement pour quelques lecteurs j'ai cité, entre crochets [*D. A.*, n° 154 et autres], les numéros des *Disquisitiones Arithmeticæ* qui contiennent les démonstrations de quelques propositions invoquées par l'auteur. Pour d'autres lecteurs plus au courant de la science des nombres, et qui voudraient seulement parcourir le Mémoire, j'ai rendu sensibles, par l'emploi des caractères *italiques*, les énoncés des diverses propositions qui le composent. Autrement le mode de rédaction aurait rendu nécessaire une lecture complète du Mémoire, pour bien mettre en évidence sa clarté et sa simplicité vraiment remarquables, surtout si on le compare à ce que l'on trouve exposé sur ce sujet dans la seconde partie de la section cinquième des *Recherches arithmétiques*.

V.-A. LEBESGUE.

[**] *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes.* (Journal de Crelle, t. XXIV.)

Dans cette recherche, je me suis borné à l'étude des propriétés qui concernent l'équivalence des formes, leur transformation et la représentation des nombres, car elles suffisaient pour la question à laquelle le Mémoire était consacré. Je n'ai point traité alors la question de la composition des formes, sujet développé par l'illustre Gauss dans la section cinquième de ses *Recherches arithmétiques* avec la plus grande généralité, mais, il est vrai, au moyen de calculs si prolixes, que très-peu de géomètres ont pu bien comprendre la nature de la composition, d'autant plus que le grand géomètre, comme il le dit lui-même, a, pour plus de brièveté, donné des démonstrations synthétiques des théorèmes les plus difficiles, en supprimant l'analyse qui les lui avait fournis. C'est pourquoi je crois pouvoir espérer qu'une exposition nouvelle et toute élémentaire de ce sujet plaira à ceux qui cultivent l'analyse.

I.

Un petit nombre de résultats connus, ou qui se tirent facilement de théorèmes connus, doivent précéder la composition des formes.

Nous dirons que les valeurs $\zeta, \zeta', \zeta'', \ldots$ *qui satisfont à la congruence*

$$u^2 \equiv D,$$

suivant les modules respectifs $m, m', m'', \ldots$ *s'accordent, ou sont concordantes, si l'on peut trouver une racine* Z *de la même congruence pour le module* $mm'm''\ldots$, *de sorte qu'on ait*

$$\zeta \equiv Z \,(\text{mod. } m), \quad \zeta' \equiv Z \,(\text{mod. } m'), \quad \zeta'' = Z \,(\text{mod. } m''), \ldots.$$

Il suffira de considérer le cas de $m, m', m'', \ldots$ impairs et premiers à D.

On voit facilement qu'on ne peut satisfaire aux congruences proposées qu'autant que, relativement à chacun des nombres premiers qui divisent deux ou plusieurs des nombres $m, m', m'', \ldots$, les valeurs correspondantes $\zeta, \zeta', \zeta'', \ldots$ sont des nombres congrus entre eux. Si cette condition a lieu, on déduira des valeurs $\zeta, \zeta', \zeta'', \ldots$ les résidus $\pi, \pi', \pi'', \ldots$ de Z relativement à chacun des nombres premiers inégaux $p, p', p'', \ldots$ qui divisent le produit $mm'm''\ldots$; or ces résidus $\pi, \pi', \pi'', \ldots$ sont évidemment les racines de notre congruence suivant les modules

p, p', p'',... respectivement : il résultera donc des principes connus de la doctrine des congruences, qu'il existe une racine Z, et une seule, satisfaisant à la congruence pour le module $mm'm''$..., et l'on voit sans difficulté que l'on a

$$Z \equiv \zeta \,(\text{mod.}\, m), \quad Z \equiv \zeta' \,(\text{mod.}\, m'), \quad Z \equiv \zeta'' \,(\text{mod.}\, m''), \ldots.$$

Comme le terme constant D conservera toujours la même valeur dans ce qui suit, nous désignerons, pour abréger, la racine ζ, répondant au module m, par la notation (m, ζ). Au moyen de cette notation, la racine Z, qui se déduit, de la manière indiquée, des racines ζ, ζ',... sera dite *composée* de ces racines, et sera commodément désignée comme il suit :

$$(m, \zeta)\,(m', \zeta')\,(m'', \zeta'')\ldots = (mm'm''\ldots, Z).$$

Remarquons, au reste, que les racines ζ, ζ', ζ'',... sont toujours concordantes quand les nombres m, m', m'',... sont premiers entre eux, et que cela subsiste même dans le cas, ici exclu, où m, m',... ne seraient pas premiers à 2D. Il est clair, en effet, que les congruences

$$Z \equiv \zeta \,(\text{mod.}\, m), \quad Z \equiv \zeta' \,(\text{mod.}\, m'), \ldots$$

déterminent alors complétement la valeur de Z pour le module $mm'm''$,..., et que l'on a

$$Z^2 \equiv D \,(\text{mod.}\, mm'm''\ldots).$$

II.

Dans les formes du second degré que l'on considère ici

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

le déterminant est $D = b^2 - ac$, les coefficients a, b, c sont des entiers sans diviseur commun, tous les cas se ramenant à celui-là. On sait que les formes qui satisfont à cette condition constituent deux ordres : le premier, quand l'un au moins des coefficients extrêmes a, c est impair; le second, quand ces coefficients sont tous deux pairs. Ce second cas sera omis pour abréger, car les raisonnements qui s'appli-

quent au premier, s'appliquent aussi au second avec les modifications convenables.

Si dans la forme on donne aux indéterminées x, y des valeurs premières entre elles (ce qui sera toujours sous-entendu), de sorte qu'on ait

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m,$$

le nombre m (qu'il faut toujours supposer premier à $2D$), sera dit être *représenté* par la forme.

Les nombres ξ, η étant pris tels que l'on ait $x\eta - y\xi = 1$, on sait qu'il est facile de démontrer [*D. A.*, n° 154] que l'expression

$$\zeta = (ax + by)\xi + (bx + cy)\eta$$

est racine de la congruence

$$u^2 \equiv D \pmod{m},$$

et que l'on trouve toujours la même racine, quelle que soit la manière dont varient ξ et η. Nous dirons que la racine (m, ζ) appartient à cette représentation du nombre m

On peut encore définir cette racine d'une manière plus convenable a notre but.

Si l'équation qui donne ζ est multipliée par y, en mettant $x\eta - 1$ au lieu de $y\xi$, on trouve

$$(1)\qquad ax + by \equiv - y\zeta \pmod{m}:$$

cette congruence détermine complétement ζ, pourvu que y soit premier à m.

Mais si y et m ont un commun diviseur maximum δ plus grand que l'unité, il divisera aussi a, et notre congruence (1) n'apprendra rien de plus que celle-ci

$$\frac{a}{\delta}x + b\frac{y}{\delta} \equiv - \frac{y}{\delta}\zeta \left(\text{mod.}\ \frac{m}{\delta}\right),$$

de sorte que relativement aux diviseurs de δ, s'il y en a, qui ne divi-

sent pas $\frac{m}{\delta}$, les résidus de ζ ne pourront être déterminés par la congruence; on remédie facilement à cet inconvénient, en remarquant que des équations données plus haut il résulte

$$\zeta \equiv bx\eta, \quad x\eta \equiv 1 \pmod{\delta},$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \zeta \equiv b \pmod{\delta}.$$

Cette formule, étant jointe à la précédente, on connaîtra parfaitement les résidus de ζ relativement à tous les diviseurs de m. Observons que si ε est le diviseur commun maximum des nombres x et m, on aura de même

$$(3) \qquad \zeta \equiv -b \pmod{\varepsilon}.$$

A ces remarques nous joindrons les suivantes bien connues, mais qu'il sera cependant utile de trouver ici réunies.

1°. *Si deux formes sont équivalentes (proprement, ce qui sera toujours sous-entendu), et que la première se change en la seconde par le moyen de la substitution*

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

où $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, *tout nombre* m *qui peut être représenté par l'une pourra l'être aussi par l'autre* [*D. A.*, n° 166], et l'on démontre facilement que *les deux représentations liées entre elles par le moyen des équations précédentes appartiennent à la même racine* (m, ζ) [*D. A.*, n° 167]. Ainsi, les représentations qui appartiennent à l'expression donnée (m, ζ) devront être rapportées à toute une classe qui sera unique.

2°. Réciproquement, on pourra démontrer que *si les représentations du nombre* m *par deux formes appartiennent à la même racine* (m, ζ), *on doit en conclure l'équivalence des deux formes.* [*D. A.*, n° 168.]

3°. Enfin, il est clair que, *étant donnée une racine quelconque* (m, ζ), *il existe toujours une classe dont les formes peuvent repré-*

senter le nombre m, de sorte que la racine correspondante à ces représentations soit (m, ζ). Il est clair, en effet, que m est représenté par la forme $\left(m, \zeta, \frac{\zeta^2 - D}{m}\right)$ [*D. A.*, n° 168] dont les coefficients sont sans diviseur commun et où m est impair, en posant $x = 1, y = 0$, et que cette représentation appartient à la racine (m, ζ).

III.

Ces prémisses posées, venons à notre proposition.

Étant données les deux formes φ *et* φ' *de même déterminant* D, *soient* m *et* m' *deux nombres impairs quelconques premiers à* D, *et pouvant être représentés respectivement par les formes* φ, φ', *de manière que les racines* (m, ζ), (m', ζ') *auxquelles appartiennent ces représentations soient concordantes.* Toute la difficulté consiste à montrer que *les représentations du nombre* mm' *qui appartiennent à la racine* $(m, \zeta)(m', \zeta')$ *se font toujours par une même forme ou plutôt par des formes appartenant à la même classe, de quelle manière d'ailleurs que varient* m *et* m'. C'est là le *Théorème fondamental* de la théorie de la composition des formes.

Supposons que les formes données (a, b, c), (a', b', c') soient préparées de sorte que les expressions (a, b), (a', b') soient concordantes, ce qui arrivera, par exemple, si l'on transforme les formes en d'autres équivalentes dont les coefficients des premiers termes soient premiers entre eux. Il faut bien remarquer que l'analyse suivante suppose seulement que les expressions (a, b), (a', b') sont concordantes : il n'est pas nécessaire que a et a' soient premiers entre eux, ni même à 2 D.

En désignant par (aa', B) l'expression composée de (a, b) et (a', b'), telle qu'on ait $B \equiv b$ (mod. a), $B \equiv b'$ (mod. a'), $D = B^2 - aa'C$, où C est entier, il est clair que les formes φ, φ' sont équivalentes aux suivantes

$$ax^2 + 2Bxy + a'Cy^2 = \varphi,$$
$$a'x'^2 + 2Bx'y' + aCy'^2 = \varphi',$$

dans lesquelles on peut les transformer.

La première équation étant multipliée par a, la seconde par a', puis

les équations résultantes multipliées membre à membre, on trouvera les équations

$$(ax + By)^2 - Dy^2 = a\varphi,$$

$$(a'x' + By')^2 - Dy'^2 = a'\varphi',$$

$$[(ax + By)(a'x' + By') + Dyy']^2$$

$$- D[(ax + By)y' + (a'x' + By')y]^2 = aa'\varphi\varphi',$$

et si l'on observe qu'à cause de $D = B^2 - aa'C$, on a

(4) $$(ax + By)(a'x' + By') + Dyy' = aa'X + BY,$$

où l'on pose

(5) $$\begin{cases} X = xx' - Cyy', \\ Y = (ax + By)y' + (a'x' + By')y = axy' + a'x'y + 2Byy', \end{cases}$$

la dernière équation, divisée par aa', prendra la forme

(6) $$aa'X^2 + 2BXY + CY^2 = \varphi\varphi' = \psi.$$

Après avoir montré que le produit des formes φ, φ' se représente indéfiniment par la forme ψ, supposons aux indéterminées x, y, et de même à x', y' premières entre elles, des valeurs déterminées desquelles il résulte $\varphi = m$, $\varphi' = m'$, et qui satisfassent aux conditions indiquées. Il restera à démontrer :

1°. Que la représentation du nombre mm' par la forme ψ, qui se tire des équations (5) et (6), est propre, c'est-dire que X et Y sont premiers entre eux ;

2°. Que la racine (mm', Z), à laquelle la représentation appartient, est en effet composée des racines (m, ζ), (m', ζ'), auxquelles appartiennent les représentations des nombres m, m'.

Premièrement. Pour montrer que X et Y n'ont pas de facteur commun, partons de cette supposition qu'un nombre premier p les divise tous les deux, et voyons ce qui en résulte. Puisque p devra diviser l'un ou l'autre des nombres m, m', supposons que m soit multiple de p. Il en résultera que m' doit être aussi supposé divisible par p. En effet, X et Y étant divisibles par p, en multipliant respectivement les équa-

tions (5) par $-ay'$ et x', en les ajoutant on obtiendra l'entier divisible par p

$$(a'x'^2 + 2Bx'y' + aCy'^2)y = m'y.$$

Si l'on ne suppose pas m' divisible par p, il faudra supposer que y et par suite a sont divisibles par p. Alors à cause de

$$xx' - Cyy' = X \equiv 0 \pmod{p},$$

x, y étant premiers entre eux, il en résultera x' divisible par p, et

$$m' = a'x'^2 + 2Bx'y' + aCy'^2$$

montrera que m' est aussi multiple de p. Le nombre p divisant les deux nombres m, m', les équations (1)

$$ax + By \equiv -y\zeta, \quad a'x' + By' \equiv -y'\zeta' \pmod{p}$$

transforment la seconde équation (5) dans la congruence

$$(\zeta + \zeta')yy' \equiv 0 \pmod{p}.$$

Si l'on avait $\zeta + \zeta' \equiv 0$, il en résulterait $\zeta \equiv -\zeta'$, contre l'hypothèse que les racines ζ et ζ' sont concordantes, ce qui donne $\zeta \equiv \zeta'$. Il ne reste donc à faire qu'une des deux suppositions $y \equiv 0$, $y' \equiv 0$, qui sont tout à fait semblables. Si l'on avait $y \equiv 0$, comme déjà $xx' - Cyy' \equiv 0$, x' serait aussi divisible par p, et nous aurions par les équations (2) et (3)

$$\zeta \equiv B, \quad \zeta' \equiv -B,$$

et par suite, comme plus haut,

$$\zeta + \zeta' \equiv 0 \pmod{p};$$

il est donc prouvé que X et Y sont premiers entre eux.

Secondement. Pour montrer maintenant que la racine (mm', Z), à laquelle appartient la représentation de mm', est en effet composée des racines (m, ζ), (m', ζ'), il suffira, à cause de la symétrie, de montrer

que l'on a $Z \equiv \zeta$ relativement à tout diviseur p premier de m. Comme on a par l'équation (1)

$$ax + By \equiv -y\zeta \pmod{p},$$

de l'équation (4) et de la seconde équation (5), on tirera facilement les congruences

$$[-\zeta(ax' + By') + Dy']y \equiv aa'X + BY,$$
$$[-\zeta y' + a'x' + By']y \equiv Y;$$

la dernière étant multipliée par ζ, et ajoutée à la première, au moyen de la congruence $\zeta^2 \equiv D$, on aurait

$$aa'X + BY \equiv -Y\zeta \pmod{p}.$$

Cette congruence étant comparée à cette autre

$$aa'X + BY \equiv -YZ \pmod{p},$$

il en résulte

$$Z \equiv \zeta \pmod{p},$$

si p ne divise pas Y.

Il reste à considérer le cas de Y divisible par p. Dans ce cas on a par l'équation (2), $Z \equiv B$. Si y est aussi multiple de p, on aura semblablement $\zeta \equiv B$, et par suite $Z \equiv \zeta$. Mais si y n'est pas divisible par p, on conclut de la congruence trouvée plus haut, que l'on a

$$a'x' + By' - \zeta y' \equiv 0;$$

d'où l'on déduit facilement que p est diviseur de $a'm'$. On a, en effet,

$$(a'x' + By')^2 - Dy'^2 \equiv (a'x' + By')^2 - \zeta^2 y'^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Il faut maintenant distinguer deux cas.

Supposons d'abord que a' n'est pas divisible par p; alors m' l'est, et l'on aura

$$a'x' + By' + \zeta' y' \equiv 0,$$

formule qui, comparée avec la précédente, donne

$$(\zeta + \zeta')y' \equiv 0,$$

congruence qui conduit à une absurdité; car comme $\zeta + \zeta'$ ne peut être multiple de p, il s'ensuivrait $y' \equiv 0$, et par suite, à cause de $m' = a'x'^2 + 2Bx'y' + aCy'^2$, $a' \equiv 0$, contre l'hypothèse. Ce cas ne peut donc avoir lieu. Dans le second cas, où a' est divisible par p, de la congruence

$$a'x' + By' - \zeta y' \equiv 0,$$

on déduit

$$(B - \zeta) y' \equiv 0.$$

Si p ne divise pas y', on aura

$$\zeta \equiv B,$$

ce qui s'accorde avec la congruence

$$Z \equiv B \,(\text{mod.}\, p).$$

Mais si p est diviseur de y', et par suite aussi de m', on aura par l'équation (2), $\zeta' \equiv B$; d'où, comme plus haut, $\zeta \equiv B$, puisque les racines ζ et ζ' s'accordent entre elles.

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $24\mu + 7$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Soit p un nombre premier de la forme $24\mu + 7$: considérons son double $2p$. Je me suis assuré par une démonstration assez simple que l'on peut poser au moins une fois, et toujours un nombre impair de fois, l'équation

$$2p = x^2 + q^{4l+1}.y^2,$$

où x et y sont des entiers positifs impairs et q un nombre premier de la forme $24\nu + 13$ qui ne divise pas y. Bien entendu, on peut avoir $l = 0$, $4l + 1 = 1$.

Comme pour chaque valeur de q l'équation

$$2p = x^2 + q^{4l+1}.y^2$$

ne peut avoir lieu qu'une seule fois, notre théorème revient à dire qu'il y a un nombre impair de valeurs de q convenables.

En d'autres termes, si du double $2p$ d'un nombre premier donné $24\mu + 7$, on retranche les carrés impairs de grandeur moindre 1, 9, 25, 49,..., on pourra mettre au moins un des restes, et toujours un nombre impair de restes, sous la forme

$$q^{4l+1}.y^2,$$

q étant un nombre premier $24\nu + 13$.

L'exemple le plus simple est 7. Or on a

$$2.7 = 1^2 + 13.1^2.$$

Vient ensuite 31 dont le double est 62. En retranchant de 62 les car-

rés 1, 9, 25, 49, on a ces restes

$$61,\quad 53,\quad 37,\quad 13,$$

qui sont tous les quatre des nombres premiers. Mais trois d'entre eux seulement sont de la forme $24\nu + 13$ et donnent lieu à des expressions de 62 du type voulu

$$1^2 + 61.1^2,\quad 5^2 + 37.1^2,\quad 7^2 + 13.1^2.$$

On pouvait, au surplus, se dispenser d'essayer le carré de 3; car les formes linéaires assignées à p et q dans notre équation

$$2p = x^2 + q^{4l+1}.y^2$$

ne permettent pas que x (ni y) soit divisible par 3.

SUR

LA PREMIÈRE DÉMONSTRATION DONNÉE PAR GAUSS DE LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DANS LA THÉORIE DES RÉSIDUS QUADRATIQUES;

PAR M. LEJEUNE-DIRICHLET.

JOURNAL DE CRELLE, TOME XLVII. — TRADUCTION DE M. HOUEL.

Parmi les nombreuses démonstrations du théorème fondamental de la théorie des congruences du second degré, la plus ancienne, découverte par Gauss dans l'année 1796, et publiée dans les *Disquisitiones Arithmeticæ,* section IV, m'a toujours paru digne d'une attention particulière, tant à cause de la simplicité de l'idée qui lui sert de base, que parce que cette démonstration est la seule, que je sache, où l'on emprunte toutes les considérations à la doctrine des congruences du second degré, à laquelle appartient essentiellement ce théorème; tandis que les principes fondamentaux des autres démonstrations semblent être plus ou moins étrangers à cette doctrine [*]. D'ailleurs si cette belle démonstration laisse à désirer sous le rapport de la brièveté, par laquelle quelques-unes des démonstrations plus récentes se font remarquer à un si haut degré, cette imperfection n'est pas dans l'essence de la méthode: elle a bien plutôt sa source dans cette circonstance accidentelle que, pour représenter certaines relations qui reviennent à chaque instant dans cette manière de procéder, on n'a employé aucun signe approprié au calcul,

[*] Voici le jugement que Gauss lui-même porte de sa première démonstration, dans un Mémoire postérieur (*Comment. Soc. Gott.*, t. XVI, p. 70): Sed omnes hæ demonstrationes, etiamsi respectu rigoris nihil desiderandum relinquere videantur, e principiis nimis heterogeneis derivatæ sunt, prima forsan excepta, quæ tamen per ratiocinia magis laboriosa procedit, operationibusque prolixioribus premitur.

ce qui a mis dans la nécessité de distinguer huit cas différents, dont chacun se partage encore en plusieurs subdivisions. En introduisant le signe dont Legendre a le premier fait usage, avec la signification plus générale que Jacobi lui a donnée depuis, et faisant quelques autres simplifications qui n'altèrent pas sensiblement le fond de la démonstration, celle-ci se trouve réduite à tel point, qu'elle ne semble guère le céder pour la brièveté à aucune des autres, si toutefois on n'oublie pas de remarquer qu'une partie des développements qu'elle contient sont encore indispensables pour la théorie des résidus quadratiques, lors même qu'on choisit un autre mode de démonstration pour la loi de réciprocité. J'ai cru devoir consacrer quelques pages à une nouvelle exposition de ce sujet, simplifiée comme je viens de l'indiquer, d'autant plus que l'expérience m'a toujours fait voir combien la multiplicité des cas différents rendait difficile aux commençants l'intelligence de l'ancienne démonstration.

§ I.

Dans ce premier paragraphe, nous allons exposer quelques propositions élémentaires et quelques définitions, indispensables pour ce qui doit suivre.

Suivant que la congruence

$$x^2 \equiv k \,(\text{mod. } m),$$

(k désignant un nombre entier positif ou négatif) est ou n'est pas possible, k est dit un *résidu* ou un *non-résidu* quadratique du module m, dont le signe est naturellement indifférent. Il est permis, pour le but que nous nous proposons, de supposer toujours k et m sans diviseur commun. Dans le cas particulièrement important où m est un nombre premier impair p, le signe $\left(\frac{k}{p}\right)$ désignera l'unité positive ou négative, suivant que k sera un résidu ou un non-résidu quadratique de p.

La proposition connue, que le produit $k'k''\ldots$ est un résidu ou un non-résidu quadratique de p, selon que ceux des facteurs $k', k'', \ldots$ qui sont non-résidus quadratiques de p, se trouvent en nombre pair ou en

nombre impair, sera exprimée, à l'aide de notre notation, par l'équation

$$\left(\frac{k'k''\ldots}{p}\right) = \left(\frac{k'}{p}\right)\left(\frac{k''}{p}\right)\cdots$$

Pour la possibilité de la congruence

$$x^2 \equiv k \,(\text{mod. } p^{\varpi}),$$

ϖ étant > 1, il faut évidemment que l'on ait la condition

$$\left(\frac{k}{p}\right) = 1,$$

et il est facile aussi de démontrer que, dès que cette condition est remplie, la congruence est résoluble pour toute valeur de ϖ. Il en est autrement de la congruence

$$x^2 \equiv k \,(\text{mod. } 2^{\varpi}).$$

Pour $\varpi = 1$, le nombre impair k n'a aucune condition à remplir; au contraire, pour $\varpi = 2$, et pour $\varpi \gtreqless 3$, les conditions nécessaires et suffisantes pour la résolubilité de la congruence sont que k ait, dans le premier cas, la forme $4\mu + 1$, dans le second, la forme $8\mu + 1$. Si le module, dans notre congruence, est le produit de puissances de différents nombres premiers, il faut et il suffit, pour que la congruence soit possible, qu'elle soit résoluble pour chacune des puissances de nombres premiers.

Nous allons maintenant donner une signification plus générale à la notation $\left(\frac{k}{p}\right)$, définie jusqu'ici pour le cas où p est un nombre premier impair, ne divisant pas le nombre positif ou négatif k; et en supposant que le nombre impair m, dont le signe est indifférent, n'ait avec k aucun diviseur commun, et soit décomposé dans ses facteurs premiers égaux ou inégaux $p', p'', p''', \ldots$, de sorte qu'on ait

$$m = p'p''p'''\ldots,$$

nous désignerons par la notation $\left(\frac{k}{m}\right)$ le produit

$$\left(\frac{k}{p'}\right)\left(\frac{k}{p''}\right)\left(\frac{k}{p'''}\right)\cdots$$

Il est aisé de voir que, dans un pareil symbole, on peut remplacer k par un nombre congru avec k suivant le module m, et que, pour ces symboles, on a les deux équations

$$\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{l}{m}\right)=\left(\frac{kl}{m}\right),\quad \left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{n}\right)=\left(\frac{k}{mn}\right).$$

Mais il ne faut pas oublier que $\left(\frac{k}{m}\right)$ n'a plus avec la congruence

$$x^2 \equiv k \pmod{m}$$

le même rapport que tout à l'heure, lorsque m était un nombre premier. Si la congruence est résoluble, il s'ensuit bien encore que $\left(\frac{k}{m}\right)=1$, parce qu'alors, d'après ce qui précède, tous les facteurs dont le produit a été désigné par $\left(\frac{k}{m}\right)$ sont égaux à l'unité positive; mais il est évident qu'on ne peut pas, de la condition $\left(\frac{k}{m}\right)=1$, conclure réciproquement la possibilité de la congruence.

Enfin, nous ferons remarquer encore que, m étant toujours supposé impair, de la possibilité de la congruence

$$lx^2 \equiv k \pmod{m},$$

k et l étant des nombres premiers avec m, résulte l'équation

$$\left(\frac{kl}{m}\right)=1,$$

comme on peut le voir immédiatement, en mettant la congruence sous la forme

$$(lx)^2 \equiv kl.$$

§ II.

Passons maintenant à l'objet spécial de ce Mémoire, aux critériums qui servent à distinguer, pour un nombre donné k, positif ou négatif, les modules simples impairs p dont k est résidu quadratique, de ceux dont k est non-résidu. Le caractère distinctif demandé ramenant, d'après la proposition que nous venons de rappeler, à la considération des caractères analogues relatifs aux facteurs premiers de k, nous n'avons que trois cas à examiner, suivant que k est l'un des nombres -1, 2, ou qu'il est égal à un nombre premier impair positif q. Pour ces trois cas, les critériums cherchés sont contenus dans les équations suivantes, où le nombre premier impair p est positif comme q et différent de q :

$$(a) \qquad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)},$$

$$(b) \qquad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(p^2-1)},$$

$$(c) \qquad \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\cdot\frac{1}{2}(q-1)}.$$

D'après la première de ces équations, $\left(\frac{-1}{p}\right)$ est égal à $+1$ ou à -1, suivant que p est de la forme $4\mu+1$ ou de la forme $4\mu+3$. D'après la seconde, on a

$$\left(\frac{2}{p}\right) = 1, \qquad \text{pour} \quad p = 8\mu + 1, 7,$$

et, au contraire,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = -1, \quad \text{pour} \quad p = 8\mu + 3, 5;$$

et, d'après la troisième, on a toujours

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right),$$

excepté lorsque les nombres premiers p, q sont tous les deux de la forme $4\mu + 3$, auquel cas on a

$$\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{p}{q}\right).$$

Les équations (a) et (b) sont faciles à démontrer pour certains cas particuliers. Tel est, pour la première, le cas où p est de la forme $4\mu + 3$, et où, par suite, $\left(\frac{-1}{p}\right)$ doit être égal à -1. Si cette propriété n'avait pas lieu pour tous les nombres premiers $4\mu + 3$, soit p le plus petit de ceux pour lesquels $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$. On peut alors poser $e^2 + 1 = ph$, et si, comme cela est toujours possible, on choisit $e < p$ et en même temps pair, on aura aussi $h < p$ et de la forme $4\mu + 3$. Le nombre h a donc un facteur premier $r < p$, de même forme $4\mu + 3$, pour lequel on a, d'après l'équation,

$$\left(\frac{-1}{r}\right) = 1,$$

ce qui est contraire à notre hypothèse.

En second lieu, pour démontrer que l'on a toujours $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, lorsque p est de l'une des formes $8\mu + 3, 5$, admettons qu'il y ait des nombres premiers de l'une de ces formes, pour lesquels la proposition n'ait point lieu, et désignons le plus petit de ces nombres par p. On peut alors poser

$$e^2 - 2 = ph,$$

et en prenant e impair et en même temps $< p$, il arrivera, à cause de

$$e^2 - 2 = 8\mu + 7,$$

que la valeur de h, correspondante à la forme $8\mu + 3$ ou 5 de p, sera de la forme $8\mu + 5$ ou 3, et de plus $< p$. Or, comme des facteurs premiers, qui seraient tous contenus dans l'une des formes $8\mu + 1, 7$, ne peuvent donner pour produit un nombre $8\mu + 3, 5$, il existe donc un facteur premier r de h, qui est de la forme $8\mu + 3, 5$, et pour le-

quel, d'après l'équation précédente, on aurait, contrairement à notre hypothèse, $\left(\frac{2}{r}\right) = 1$.

La démonstration de l'équation $\left(\frac{-2}{p}\right) = -1$, lorsque p est de l'une des formes $8\mu + 5, 7$, se faisant absolument de la même manière, nous l'omettrons pour abréger. En mettant ce dernier résultat, pour le cas de $p = 8\mu + 7$, sous la forme

$$\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right) = -1,$$

et remarquant que, d'après ce que nous avons vu, $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, puisque la forme $8\mu + 7$ est un cas particulier de la forme $4\mu + 3$, il vient, pour les nombres premiers $p = 8\mu + 7$,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = 1,$$

de sorte que maintenant la proposition (b) est démontrée pour tous les nombres premiers qui ne sont pas de la forme $8\mu + 1$.

§ III.

Avant de pouvoir entreprendre la démonstration générale des propositions énoncées dans le paragraphe précédent, nous allons tirer de ces équations, supposées exactes, quelques conséquences, que nous ferons précéder de la remarque suivante.

Étant donné un produit

$$R = \Pi r$$

de facteurs impairs r, pour déterminer son résidu relatif au diviseur 4, si l'on met chaque facteur sous la forme $(r - 1) + 1$, on peut, dans la multiplication, négliger tous les termes dans lesquels les premières parties de ces binômes sont multipliées entre elles. On a ainsi

$$R \equiv 1 + \sum (r - 1) \pmod{4};$$

en d'autres termes, $\frac{1}{2}(R-1)$ et $\sum \frac{1}{2}(r-1)$ sont de *même espèce*, c'est-à-dire, ou tous deux pairs, ou tous deux impairs.

Pareillement, de l'équation

$$R^2 = \Pi r^2,$$

tout carré impair r^2 étant de la forme $8\mu+1$, il résulte

$$R^2 \equiv 1 + \sum (r^2 - 1) (\text{mod. } 64),$$

d'où l'on conclut encore que les nombres $\frac{1}{8}(R^2-1)$ et $\sum \frac{1}{8}(r^2-1)$ sont de même espèce.

Au moyen de cette remarque, il est maintenant facile de déduire des équations ci-dessus les équations suivantes, plus générales et de même forme, dans lesquelles P et Q désignent deux nombres positifs impairs quelconques, n'ayant entre eux aucun diviseur commun :

$$(a') \qquad \left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(P-1)},$$

$$(b') \qquad \left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(P^2-1)},$$

$$(c') \qquad \left(\frac{Q}{P}\right)\left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(P-1)\cdot\frac{1}{2}(Q-1)}.$$

Posons $P = \Pi p$, p désignant chacun des facteurs premiers, égaux ou inégaux, de P ; appliquons à chaque facteur p la proposition (a), et multiplions entre elles toutes les équations ainsi obtenues ; il vient alors

$$\left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\sum\frac{1}{2}(p-1)},$$

résultat qui se change dans l'équation (a'), en remplaçant l'exposant par le nombre de même espèce $\frac{1}{2}(P-1)$. On mettrait de même en évidence l'exactitude de la proposition (b'). Pour démontrer l'équation

(c'), décomposons aussi Q en ses facteurs simples q. Le premier membre peut alors être considéré comme un produit d'expressions de la forme $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)$, chaque nombre p devant être combiné successivement avec chaque nombre q. En remplaçant chacune de ces expressions par sa valeur donnée par l'équation (c), il vient

$$\left(\frac{Q}{P}\right)\left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^{\sum \frac{1}{2}(p-1)\cdot\frac{1}{2}(q-1)},$$

le signe de sommation se rapportant à toutes les combinaisons p, q. La somme est par conséquent le produit des facteurs $\sum \frac{1}{2}(p-1)$ et $\sum \frac{1}{2}(q-1)$, auxquels on peut substituer les nombres respectivement de même espèce $\frac{1}{2}(P-1)$ et $\frac{1}{2}(Q-1)$, et l'on a ainsi l'équation (c').

En multipliant entre elles les équations (a') et (c'), on a

$$\left(\frac{-Q}{P}\right)\left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(P-1)\cdot\frac{1}{2}(Q+1)},$$

ou

$$\left(\frac{-Q}{P}\right)\left(\frac{P}{-Q}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(P-1)\cdot\frac{1}{2}(-Q-1)}.$$

On voit donc que l'équation (c') subsiste encore lorsqu'on l'applique au nombre positif P et au nombre négatif $-$Q, et qu'elle est, pour ce cas, une conséquence de l'équation (a') et de l'équation primitive (c'). De même celle-ci est évidemment une conséquence de (a') et de l'équation (c') appliquée à la combinaison P, $-$Q, et cette même remarque s'applique naturellement aussi aux équations (a) et (c), qui sont contenues comme cas particuliers dans celles dont nous nous occupons.

§ IV.

Actuellement, pour démontrer généralement les propositions (a) et (c), partons de la supposition qu'elles sont vraies l'une et l'autre jusqu'à un certain nombre premier positif impair q exclusivement, c'est-à-dire

que la première est vraie pour tout nombre premier positif. impair et $< q$, et que la seconde est vraie pour deux pareils nombres premiers. Si l'on déduit de cette supposition que l'équation (a) est vraie pour q, et l'équation (c) pour toute combinaison p, q, pourvu seulement que le nombre premier positif impair p soit moindre que q, les deux propositions, qui sont évidemment vraies pour les plus petits nombres premiers, seront alors rendues générales.

Il est aisé de voir que la démonstration qu'il s'agit de donner se réduit à prouver les deux points suivants :

Premièrement, il faut faire voir que si, en prenant $\varpi = \pm p$ avec un signe convenable, on a $\left(\frac{\varpi}{q}\right) = 1$, l'équation (c), appliquée à la combinaison q, ϖ, donnera

$$\left(\frac{q}{\varpi}\right) = \left(\frac{\varpi}{q}\right)(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)\cdot\frac{1}{2}(\varpi-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)\cdot\frac{1}{2}(\varpi-1)}.$$

En second lieu, si q est de la forme $4\mu + 1$, et que l'on ait

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -1,$$

il faut en déduire

$$\left(\frac{q}{p}\right) = -1,$$

et faire voir en même temps que ce second cas a lieu pour toute valeur de q de la forme $4\mu + 1$, c'est-à-dire que, parmi les nombres premiers p, plus petits que q, il y en a toujours au moins un qui est non-résidu quadratique de q.

En effet, si q est de la forme $4\mu + 3$, l'équation (a) est déjà démontrée pour q, et, par conséquent, d'après ce qui a été remarqué à la fin du paragraphe précédent, il est indifférent pour laquelle des deux combinaisons p, q, ou $-p$, q, on démontrera l'exactitude de l'équation (c). Mais de $\left(\frac{-1}{q}\right) = -1$, il résulte $\left(\frac{-p}{q}\right) = -\left(\frac{p}{q}\right)$, c'est-à-dire qu'il y a toujours une de ces combinaisons comprise dans le premier cas.

Si, au contraire, q est de la forme $4\mu + 1$, alors, de la supposition

$\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, il résulte, d'après le premier cas (en posant $\varpi = p$),

$$\left(\frac{q}{p}\right) = 1;$$

et de la supposition $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, il résulte, d'après le second cas,

$$\left(\frac{q}{p}\right) = -1,$$

comme cela devait être. L'équation

$$\left(\frac{-1}{q}\right) = 1$$

se démontre comme il suit. Pour un nombre premier p, appartenant au second cas, on a

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -1, \quad \left(\frac{q}{p}\right) = -1.$$

Si l'on avait maintenant

$$\left(\frac{-1}{q}\right) = -1,$$

et, par suite,

$$\left(\frac{-p}{q}\right) = 1,$$

il en résulterait, d'après le premier cas,

$$\left(\frac{q}{p}\right) = 1,$$

résultat contradictoire avec celui que l'on déduit du second cas.

Avant de passer à la démonstration des deux points que nous venons d'indiquer, il faut remarquer que la supposition faite au commencement du présent paragraphe entraîne évidemment, d'après la manière dont les équations (a'), (c') se déduisent des équations (a), (c) [paragraphe précédent], l'exactitude de l'équation (c') pour deux nombres impairs quelconques premiers entre eux, pourvu qu'ils ne soient pas tous les deux négatifs, et que leurs facteurs premiers soient tous moindres que q.

§ V.

En vertu de l'équation

$$\left(\frac{\varpi}{q}\right) = 1,$$

qui a lieu dans le premier cas, on peut poser

$$e^2 - \varpi = qf.$$

Si l'on suppose dans cette équation, comme on peut toujours le faire, e pair et en même temps $< q$, alors f sera impair, positif [*] (puisque la valeur numérique p de ϖ est moindre que q), et aussi $< q$. Notre équation devra maintenant être traitée différemment, suivant que f sera ou ne sera pas divisible par ϖ.

I. Si f n'est pas divisible par ϖ, on a, d'après le § I,

$$\left(\frac{\varpi}{f}\right) = 1, \quad \left(\frac{qf}{\varpi}\right) = \left(\frac{q}{\varpi}\right)\left(\frac{f}{\varpi}\right) = 1,$$

d'où l'on tire par multiplication, en appliquant l'équation (c') à la combinaison f, ϖ,

$$\left(\frac{q}{\varpi}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(f-1)\cdot\frac{1}{2}(\varpi-1)}.$$

D'ailleurs il résulte de l'équation précédente que $\frac{1}{2}(f-1)$ et $\frac{1}{2}(q-1) + \frac{1}{2}(\varpi+1)$ sont des nombres de même espèce. En substituant donc, dans les exposants, le second nombre au premier, et supprimant $\frac{1}{4}(\varpi^2 - 1)$ comme nombre pair, on a, comme cela devait

[*] Dans ce qui va suivre, nous designerons par les caractères italiques des nombres essentiellement positifs, et au contraire par les lettres grecques des nombres qui pourront être positifs ou négatifs.

être,

$$\left(\frac{q}{\varpi}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)\cdot\frac{1}{2}(\varpi-1)}.$$

II. Si f contient le facteur ϖ, posons

$$e = \varpi\varepsilon, \quad f = \varpi\varphi,$$

de sorte que ε et φ sont de même signe. De l'équation résultante

$$\varpi\varepsilon^2 - 1 = q\varphi$$

il suit alors que l'on a

$$\left(\frac{\varpi}{\varphi}\right) = 1, \quad \left(\frac{-q\varphi}{\varpi}\right) = \left(\frac{q}{\varpi}\right)\left(\frac{-\varphi}{\varpi}\right) = 1,$$

d'où l'on tire, par multiplication, en appliquant l'équation (c') aux nombres ϖ, $-\varphi$, dont un seul est négatif,

$$\left(\frac{q}{\varpi}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(\varpi-1)\cdot\frac{1}{2}(\varphi+1)},$$

ou, puisque $\frac{1}{2}(q-1)$ et $\frac{1}{2}(\varphi+1)$ sont évidemment de même espece,

$$\left(\frac{q}{\varpi}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)\cdot\frac{1}{2}(\varpi-1)}.$$

§ VI.

La supposition relative au second cas

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -1, \quad q = 4\mu + 1$$

ne permet pas, comme dans le premier cas, d'établir immédiatement une équation. Il faut démontrer préalablement l'existence d'un nombre premier auxiliaire $p' < q$, satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{q}{p'}\right) = -1.$$

Si q est de la forme $8\mu + 5$, cette démonstration ne présente aucune difficulté; car $q - 2$ est alors de la forme $8\mu + 3$, et a par conséquent un facteur premier $p' < q$ de l'une des formes $8\mu + 3, 5$, et pour lequel on a

$$q \equiv 2 \pmod{p'},$$

et partant

$$\left(\frac{q}{p'}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right),$$

ou, d'après le § II,

$$\left(\frac{q}{p'}\right) = -1.$$

L'existence de p' n'est pas aussi facile à démontrer lorsque q est de la forme $8\mu + 1$. C'est la nécessité d'étendre aussi la démonstration à ce cas qui constituait peut-être la plus grande difficulté que Gauss ait eu à surmonter dans sa première manière d'établir la loi de réciprocité. Il y est parvenu par une considération où il a fait preuve d'une rare sagacité, et qui revient au fond à la suivante.

Soit $2m + 1 < q$, et supposons que q soit résidu quadratique de tous les nombres premiers impairs qui ne surpassent pas $2m + 1$. D'après le § I, et à cause de $q = 8\mu + 1$, la congruence $x^2 \equiv q$ est alors résoluble pour tout module qui, outre une puissance quelconque de 2, contient seulement des facteurs premiers impairs ne surpassant pas $2m + 1$. Or cette condition est remplie par le produit

$$1.2.3\ldots(2m + 1) = \mathrm{M},$$

et l'on peut dès lors poser

$$k^2 \equiv q \pmod{\mathrm{M}},$$

où nous prendrons k positif. On a donc

$$(q - 1^2)(q - 2^2)\ldots(q - m^2) \equiv (k^2 - 1^2)(k^2 - 2^2)\ldots(k^2 - m^2) \pmod{\mathrm{M}}.$$

Maintenant le second membre, si on le multiplie par le facteur k, qui est premier avec M, peut s'écrire sous forme de produit continu,

$$(k + m)(k + m - 1)\ldots(k - m),$$

lequel produit est un multiple de M, comme on peut le faire voir par des considérations purement arithmétiques, et comme cela résulte aussi de ce que ce nombre, divisé par M, représente un nombre de combinaisons. Il faut donc que le premier membre de l'équation soit aussi divisible par M. En donnant au quotient de cette division la forme

$$\frac{1}{m+1}\cdot\frac{q-1^2}{(m+1)^2-1^2}\cdot\frac{q-2^2}{(m+1)^2-2^2}\cdots\frac{q-m^2}{(m+1)^2-m^2},$$

il se manifeste évidemment une contradiction, si l'on choisit pour m le nombre entier immédiatement inférieur à $\sqrt{q}$, parce qu'alors le quotient est un produit de fractions moindres que l'unité. On a ici supposé tacitement que ce choix du nombre m est conforme à la condition $2m+1<q$, qui sert de base à notre raisonnement, ce qui est en effet le cas, puisque

$$2m+1<2\sqrt{q}+1,$$

et qu'évidemment, pour tous les nombres premiers $8\mu+1$, dont le plus petit est 17, on a

$$2\sqrt{q}+1<q.$$

Il est donc démontré qu'il existe toujours un nombre premier $p'<2m+1<q$, et tel qu'on ait

$$\left(\frac{q}{p'}\right)=-1.$$

Remarquons encore que, pour notre nombre premier auxiliaire p', on a

$$\left(\frac{p'}{q}\right)=-1,$$

car de la supposition

$$\left(\frac{p'}{q}\right)=1,$$

il résulterait, d'après le paragraphe précédent,

$$\left(\frac{q}{p'}\right)=1.$$

En nous occupant maintenant de démontrer que de l'équation

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -1$$

(q étant égal à $4\mu + 1$), il résulte toujours

$$\left(\frac{q}{p}\right) = -1,$$

nous pouvons considérer p comme différent du nombre premier auxiliaire p', puisque l'on a déjà établi pour celui-ci la simultanéité des équations

$$\left(\frac{p'}{q}\right) = -1, \quad \left(\frac{q}{p'}\right) = -1.$$

à l'aide desquelles nous pourrons représenter notre hypothèse par l'équation

$$\left(\frac{pp'}{q}\right) = 1,$$

et la conséquence qui en doit résulter par

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = 1.$$

D'après la première de ces équations, on peut donc poser

$$e^2 - pp' = q\varphi,$$

e devant être pair et $< q$. Alors φ sera impair, et à cause de $p < q$, $p' < q$, φ sera numériquement moindre que q.

Il y a maintenant trois cas à distinguer : ou φ n'est divisible par aucun des nombres premiers p, p', ou il l'est par un seul, ou enfin il l'est par tous les deux. Comme l'équation précédente et l'équation

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = 1,$$

qu'il s'agit d'en déduire, sont symétriques par rapport à p et à p', le second cas se traitera de la même manière, que ce soit p ou p' que l'on considère comme facteur de φ.

I. Si φ n'est divisible ni par p ni par p', de notre équation il résulte

$$\left(\frac{pp'}{\varphi}\right) = 1, \quad \left(\frac{q\varphi}{pp'}\right) = \left(\frac{q}{pp'}\right)\left(\frac{\varphi}{pp'}\right) = 1,$$

d'où, en multipliant et appliquant la formule (c'),

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(pp'-1)\cdot\frac{1}{2}(\varphi-1)}.$$

Mais d'après l'équation ci-dessus, dans laquelle $q = 4\mu + 1$, les nombres $\frac{1}{2}(pp'-1)$, $\frac{1}{2}(\varphi-1)$ ne sont pas de même espèce, c'est-à-dire que l'un d'eux est pair; donc on a

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = 1.$$

II. A cause de la symétrie que nous avons déjà remarquée, nous pouvons considérer p' comme étant le diviseur de φ. En posant

$$\varphi = p'\psi, \quad e = p'g,$$

notre équation se change en

$$p'g^2 - p = q\psi,$$

ψ n'étant divisible ni par p ni par p'. De cette dernière équation, on tire

$$\left(\frac{pp'}{\psi}\right) = 1, \quad \left(\frac{p'q\psi}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{-pq\psi}{p'}\right) = 1,$$

d'où, en multipliant,

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = \left(\frac{pp'}{\psi}\right)\left(\frac{\psi}{pp'}\right)\left(\frac{p'}{p}\right)\left(\frac{-p}{p'}\right),$$

ou, en appliquant l'équation (c') aux deux combinaisons pp', ψ et p', $-p$,

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(pp'-1)\cdot\frac{1}{2}(\psi-1)+\frac{1}{2}(p+1)\cdot\frac{1}{2}(p'-1)}.$$

En remplaçant $\frac{1}{2}(\psi-1)$ par le nombre $\frac{1}{2}(p+1)$ qui, d'après une

équation précédente, est de même espèce que $\frac{1}{2}(\psi - 1)$, et $\frac{1}{2}(pp' - 1)$ par $\frac{1}{2}(p-1) + \frac{1}{2}(p'-1)$, l'exposant prend la valeur

$$\frac{1}{2}(p+1)(p'-1) + \frac{1}{4}(p^2 - 1),$$

qui est évidemment paire. Donc on a

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = 1.$$

III. En posant, dans le troisième cas,

$$\varphi = pp'\psi, \quad e = pp'g,$$

il vient

$$pp'g^2 - 1 = q\psi,$$

d'où résulte

$$\left(\frac{pp'}{\psi}\right) = 1, \quad \left(\frac{-q\psi}{pp'}\right) = \left(\frac{q}{pp'}\right)\left(\frac{-\psi}{pp'}\right) = 1,$$

et par suite

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(pp'-1)\cdot\frac{1}{2}(\psi+1)}.$$

Or $\frac{1}{2}(\psi + 1)$ étant évidemment pair, il vient finalement

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = 1.$$

Les équations (a) et (c), ainsi que les équations (a') et (c') qui s'en déduisent, sont donc généralement démontrées.

§ VII.

Il reste encore maintenant à s'occuper du cas de la proposition (b) relatif aux nombres premiers de la forme $8\mu + 1$, et qui nous restait encore à démontrer. Désignons par q un nombre premier quelconque de cette forme, et admettons que la proposition soit vraie pour tous les nombres premiers de cette même forme et $< q$, ou, ce qui revient absolument au même d'après ce qui a été démontré au § II, qu'elle soit vraie pour tous les nombres premiers $< q$. Si de cette hypothèse

on peut déduire l'équation

$$\left(\frac{2}{q}\right) = 1,$$

la proposition sera vraie alors sans restriction. Nous allons maintenant prouver l'exactitude de cette dernière équation, en faisant voir que l'hypothèse de $\left(\frac{2}{q}\right) = -1$ conduit à une contradiction.

Choisissons un nombre premier $p < q$ et tel, que l'on ait

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -1.$$

On aura, d'après l'hypothèse que nous venons de faire,

$$\left(\frac{2p}{q}\right) = 1,$$

et l'on peut poser par conséquent

$$e^2 - 2p = q\varphi,$$

où, en supposant e impair et $< q$, φ sera pareillement impair et $< q$, abstraction faite du signe. Il faut maintenant distinguer deux cas, selon que φ n'est pas divisible ou qu'il est divisible par p.

I. Dans le premier cas, on a immédiatement

$$\left(\frac{2p}{q\varphi}\right) = \left(\frac{2}{q}\right)\left(\frac{2}{\varphi}\right)\left(\frac{p}{q\varphi}\right) = 1, \quad \left(\frac{q\varphi}{p}\right) = 1,$$

et, par suite,

$$\left(\frac{2}{q}\right) = \left(\frac{2}{\varphi}\right)\left(\frac{p}{q\varphi}\right)\left(\frac{q\varphi}{p}\right) = \left(\frac{2}{\varphi}\right)(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\cdot\frac{1}{2}(q\varphi-1)}.$$

Or l'équation (b'), dans laquelle le signe de P est indifférent, et qui est une conséquence de l'équation (b), est évidemment applicable au nombre φ, dont tous les facteurs premiers satisfont à l'équation (b). Comme on a, d'après cela,

$$\left(\frac{2}{\varphi}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(\varphi^2-1)},$$

on peut donner à la dernière équation la forme

$$-1=(-1)^{\frac{1}{8}[2(p-1)(q\varphi-1)+\varphi^2-1]}.$$

L'expression entre crochets variera évidemment d'un multiple de 16, si l'on y remplace $q\varphi-1$ et φ par d'autres nombres congrus avec eux suivant le module 8. Mais, à cause de

$$e^2\equiv 1,\quad q\equiv 1 \pmod{8},$$

il résulte immédiatement, d'une équation précédente, qu'on a

$$q\varphi-1\equiv -2p,\quad \varphi\equiv 1-2p \pmod{8},$$

de sorte que notre expression

$$\equiv -4p(p-1)+(1-2p)^2-1=0 \pmod{16},$$

et par conséquent le second membre de l'équation ci-dessus est égal à l'unité positive et est différent du premier membre.

II. Si φ est divisible par p, posons

$$\varphi=p\psi,\quad e=pg,\qquad \text{d'où}\qquad pg^2-2=q\psi.$$

En vertu de cette dernière équation, on a

$$\left(\frac{2p}{q\psi}\right)=-\left(\frac{2}{\psi}\right)\left(\frac{p}{q\psi}\right)=1,\quad \left(\frac{-2q\psi}{p}\right)=\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{-q\psi}{p}\right)=1,$$

d'où, comme dans le cas précédent,

$$-1=(-1)^{\frac{1}{8}[2(p-1)(q\psi+1)+p^2+\psi^2-2]}.$$

En remplaçant maintenant les nombres $q\psi+1$ et ψ par les nombres $p-1$ et $p-2$, qui, d'après une équation précédente, leur sont congrus suivant le module 8, on voit que l'expression entre crochets

$$\equiv 2(p-1)^2+p^2+(p-2)^2-2=4(p-1)^2\equiv 0 \pmod{16},$$

ce qui conduit encore à la même contradiction.

QUESTIONS DYNAMIQUES.

SUR

LA PERCUSSION DES CORPS;

PAR M. POINSOT [*].

CHAPITRE TROISIÈME.

Percussion d'un corps animé par des forces quelconques.

1. Nous n'avons traité jusqu'ici la question que dans quelques cas tres-particuliers. Nous avons supposé que tout le mouvement du corps provenait de l'impulsion d'une *force unique* P, dirigée d'une certaine manière, et nous nous sommes borné à déterminer la percussion Q, dont le corps est capable contre un point fixe, seulement pour certains lieux où cet obstacle lui serait présenté.

Il nous reste donc à résoudre la question générale où le corps est animé par des forces *quelconques données*, et où l'on demande la percussion qu'il peut produire, par un quelconque de ses points, sur un obstacle fixe que ce point du corps viendrait à rencontrer.

Problème général.

2. *Considérons un corps solide libre, actuellement animé par des forces données, et supposons que l'un quelconque de ses points* C *rencontre tout à coup un point fixe qui force le corps à changer de*

[*] Cet article complète le Mémoire dont l'illustre auteur n'avait donné que les deux premiers chapitres dans le tome II de notre série actuelle (p. 281). Il sera naturel d'y joindre les deux Notes insérées dans le présent volume, cahier de mai. J. L.

mouvement; on demande la direction et la grandeur de la percussion qui sera produite sur cet obstacle.

3. La solution n'est pas difficile à découvrir : car désignons par Q la percussion qui se fera sentir au point fixe; il est évident que si, au moment du choc, on appliquait au corps une force — Q parfaitement égale et contraire à Q, le point du corps qui est en C aurait tout à coup une vitesse *nulle*, ou tomberait en repos à l'instant que l'on considère.

Pour obtenir les équations du problème, il suffit donc d'exprimer que de l'ensemble des forces *données* et de la force *inconnue* — Q, qu'on suppose appliquée en C, il ne doit résulter pour ce point particulier C du corps qu'une vitesse nulle; et cette seule condition étant développée, donnera tout ce qui est nécessaire pour déterminer la *grandeur*, la *direction* et le *sens* de la percussion cherchée Q.

Développement de la solution.

4. Prenons pour axes actuels des coordonneés les trois axes *principaux* du corps qui passent par son centre de gravité G. Désignons par m la masse du corps, par $m\alpha^2$, $m\beta^2$, $m\gamma^2$ ses trois moments principaux d'inertie, et par x, y, z les coordonnées du point C.

Je commence par réduire toutes les forces *données* à trois forces

$$X_0,\ Y_0,\ Z_0$$

dirigées suivant les trois axes, et à trois couples

$$L_0,\ M_0,\ N_0$$

autour des mêmes axes.

Je conçois de même que l'on ait transformé la force *inconnue* — Q, qui est appliquée en C, dans les trois forces

$$X,\ Y,\ Z$$

appliquées au centre de gravité G, et dans les trois couples qu'elles donnent autour des trois axes principaux, dont les moments sont exprimés par

$$Yz - Zy,\quad Zx - Xz,\quad Xy - Yx.$$

5. De cette manière le système de toutes les forces se trouve ramené aux trois forces et aux trois couples suivants, savoir :

1°. Les trois forces

$$X_0 + X, \quad Y_0 + Y, \quad Z_0 + Z$$

appliquées suivant les axes au centre de gravité G;

2°. Les trois couples :

$$L_0 + Zy - Yz, \quad M_0 + Xz - Zx, \quad N_0 + Yx - Xy$$

perpendiculaires aux mêmes axes.

6. Il s'agit de voir maintenant quelle est la *vitesse* qui en résulte pour le point particulier C du corps.

7. D'abord les trois forces étant appliquées au centre de gravité, donnent à tous les points du corps et, par conséquent, au point C lui-même les trois vitesses respectives :

$$(1) \qquad \frac{X_0 + X}{m}, \quad \frac{Y_0 + Y}{m}, \quad \frac{Z_0 + Z}{m}$$

suivant les coordonnées x, y, z.

8. En second lieu, les trois couples tendent à faire tourner le corps autour des trois axes avec les trois vitesses angulaires respectives p, q, r dont les valeurs sont

$$(2) \quad p = \frac{L_0 + Zy - Yz}{m\alpha^2}, \quad q = \frac{M_0 + Xz - Zx}{m\beta^2}, \quad r = \frac{N_0 + Yx - Xy}{m\gamma^2}.$$

Or il est aisé de voir que du système de ces trois rotations p, q, r, il vient pour le point C, suivant ses trois coordonnées x, y, z, les trois vitesses respectives exprimées par

$$(3) \qquad qz - ry, \quad rx - pz, \quad py - qx.$$

Donc, en ajoutant ces vitesses aux trois précédentes (1), et désignant par $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ les vitesses totales du point C suivant ses trois coordonnées

x, y, z, on aura

$$\dot{x} = \frac{X_0 + X}{m} + qr - ry,$$
$$\dot{y} = \frac{Y_0 + Y}{m} + rx - pz,$$
$$\dot{z} = \frac{Z_0 + Z}{m} + py - qx;$$

ce qui donne (en y mettant, au lieu de p, q, r, leurs valeurs ci-dessus (2) et réduisant), les trois équations suivantes :

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{X_0 + X}{m} + \dfrac{z(M + Xz - Zx)}{m\beta^2} - \dfrac{y(N_0 + Yx - Xy)}{m\gamma^2}, \\ \dot{y} = \dfrac{Y_0 + Y}{m} + \dfrac{x(N_0 + Yx - Xy)}{m\gamma^2} - \dfrac{z(L_0 + Zy - Yz)}{m\alpha^2}; \\ \dot{z} = \dfrac{Z_0 + Z}{m} + \dfrac{y(L_0 + Zy - Yz)}{m\alpha^2} - \dfrac{x(M_0 + Xz - Zx)}{m\beta^2}. \end{cases}$$

9. Voilà donc les équations qui donnent immédiatement les trois composantes $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ de la vitesse j que prendrait le point C du corps en vertu des forces données qui l'animent combinées avec la force inconnue $-$ Q qui lui serait appliquée en C.

10. Or si la force $-$ Q est bien choisie, il faut que la vitesse du point C se trouve ici nulle, ce qui exige que ses trois composantes rectangulaires $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ soient nulles chacune en particulier.

Il suffit donc, pour obtenir les équations cherchées, de faire $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ toutes trois nulles dans les formules (A) qui précèdent, ce qui donne les trois équations suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} (\beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 + \beta^2\gamma^2)X - \beta^2 xy\,Y - \gamma^2 xz\,Z = -\beta^2\gamma^2 X_0 - \gamma^2 z M_0 + \beta^2 y N_0, \\ \alpha^2 xy\,X - (\alpha^2 x^2 + \gamma^2 z^2 + \alpha^2\gamma^2)Y + \gamma^2 yz\,Z = \alpha^2\gamma^2 Y_0 - \gamma^2 z L_0 + \alpha^2 x N_0, \\ \alpha^2 xz\,X + \beta^2 yz\,Y - (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \alpha^2\beta^2)Z = \alpha^2\beta^2 Z_0 + \beta^2 y L_0 - \alpha^2 x M_0, \end{cases}$$

qui détermineront les composantes X, Y, Z de la force $-$ Q, et, par conséquent (en changeant le signe) celles de la percussion cherchée Q. Ce qu'il fallait trouver.

Résolution des trois équations précédentes (1).

11. Ces trois équations étant du premier degré en X, Y, Z peu-

vent être résolues sur-le-champ par les formules connues. Ainsi en représentant X, Y, Z par les trois fractions

$$X = \frac{N_x}{D}, \quad Y = \frac{N_y}{D}, \quad Z = \frac{N_z}{D},$$

on trouvera, toute réduction faite, et par un calcul qui n'a d'autre difficulté que sa longueur :

1°. Pour le commun dénominateur D de ces trois fractions, la valeur suivante

$$\frac{D}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = (x^2+y^2+z^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)+\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)x^2+\beta^2(\alpha^2+\gamma^2)y^2$$
$$+\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)z^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2;$$

2°. Pour les numérateurs N_x, N_y, N_z de ces mêmes fractions, les valeurs

$$\frac{N_x}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = -[x^2(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)+\gamma^2(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)+\beta^2(\alpha^2x^2+\gamma^2z^2)+\alpha^2\beta^2\gamma^2]X_0$$
$$-xy(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\alpha^2\beta^2)Y_0-xz(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\alpha^2\gamma^2)Z_0$$
$$+xyz(\beta^2-\gamma^2)L_0-z(\alpha^2x^2+\gamma^2y^2+\gamma^2z^2+\alpha^2\gamma^2)M_0$$
$$+y(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\beta^2z^2+\alpha^2\beta^2)N_0,$$

$$\frac{N_y}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = -xy(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\alpha^2\beta^2)X_0$$
$$-[y^2(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)+\alpha^2(\beta^2y^2+\gamma^2z^2)+\gamma^2(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)+\alpha^2\beta^2\gamma^2]Y_0$$
$$-yz(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\beta^2\gamma^2)Z_0$$
$$+z(\gamma^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\beta^2\gamma^2)L_0+xyz(\gamma^2-\alpha^2)M_0$$
$$-x(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\alpha^2z^2+\alpha^2\beta^2)N_0,$$

$$\frac{N_z}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = -xz(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\alpha^2\gamma^2)X_0-yz(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\beta^2\gamma^2)Y_0$$
$$-[z^2(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)+\alpha^2(\beta^2y^2+\gamma^2z^2)+\beta^2(\alpha^2x^2+\gamma^2z^2)+\alpha^2\beta^2\gamma^2]Z_0$$
$$-y(\beta^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+\beta^2\gamma^2)L_0+x(\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\gamma^2z^2+\alpha^2\gamma^2)M_0$$
$$+xyz(\alpha^2-\beta^2)N_0.$$

12. Si donc, dans l'expression

$$Q = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \frac{\sqrt{N_x^2+N_y^2+N_z^2}}{D},$$

on met, à la place de N_x, N_y, N_z et D, les valeurs précédentes, on aura la percussion cherchée Q en fonction des données du problème, savoir : les trois *bras* α, β, γ de l'inertie du corps, les forces et couples X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0 qui l'animent, et les trois coordonnées x, y, z du point de ce corps où le point fixe est présenté.

13. On voit, par la forme de ces expressions, que la percussion actuelle du corps, en vertu des forces et des couples qui lui sont appliqués, se compose des percussions qui seraient produites sur le même point, si chacune de ces forces et chacun de ces couples donnés agissait séparément, et il est évident que cela doit être.

On peut d'ailleurs vérifier l'exactitude de toutes ces formules générales en les appliquant aux différents cas particuliers que nous avons traités dans les deux chapitres précédents : c'est une application que j'avais développée sur plusieurs exemples, mais que je supprime ici et laisse à faire au lecteur qui se pourra convaincre du parfait accord de nos résultats.

Je me contenterai donc d'ajouter ici deux mots sur le sens bien précis qu'on doit attacher, dans le problème dont nous venons de donner la solution, à la nature de l'obstacle qu'on y considère. C'est dans ce problème ce que l'on nomme un *point fixe* que l'on suppose capable d'arrêter tout à coup et en tous sens le point C du corps qui vient le frapper, c'est-à-dire de le retenir au même lieu de l'espace comme si ce point C du corps était tombé, et *pour un instant,* dans l'intérieur d'une sphère creuse et résistante d'un rayon infiniment petit. Il faut bien remarquer qu'après le choc cet obstacle disparaît comme s'il n'existait plus : car le corps, dans le mouvement nouveau qui lui reste et qui n'est autre chose qu'une rotation autour d'un axe spontané passant par le point C, devient incapable de frapper par le même point C.

Mais dans ce nouveau mouvement on pourrait chercher la nouvelle percussion que le corps est capable de produire par tout autre point C', et on trouverait cette percussion exactement par les mêmes formules, en y changeant les premières forces données et les remplaçant par les nouvelles, ce qui conduit naturellement à la théorie de ces mouvements singuliers qu'on appelle des *ricochets*.

FUNÉRAILLES DE M. POINSOT.

DISCOURS DE M. BERTRAND,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

AU NOM DE LA SECTION DE GÉOMÉTRIE.

Messieurs,

En l'absence de notre vénérable doyen, permettez-moi d'être l'interprète des regrets de la Section de Géométrie à laquelle appartient M. Poinsot, et de l'Académie des Sciences dont il est une des gloires.

M. Poinsot était un de ces hommes dont la supériorité apparaît aux yeux les moins clairvoyants. Ceux-là mêmes qui, sans s'occuper spécialement de science, entendaient sa conversation si sensée et si fine; ceux qui pouvaient juger avec quelle supériorité M. Poinsot savait donner un tour ingénieux et profond aux propositions les plus simples; tous ceux, enfin, qui ont eu le bonheur de l'approcher, ont reconnu en lui une de ces intelligences d'élite, appelées par leur nature même à occuper les premiers rangs de la société, et qui, sans aucun effort, se trouvent posséder les dons précieux que le travail le plus opiniâtre ne saurait accorder à d'autres.

Je n'essayerai pas, en présence de cette tombe, de retracer même sommairement les titres scientifiques d'un homme qui a été notre maître à tous, et qui a exercé sur nos études mathématiques une influence si profonde et si saine. Ce n'est pas à moi qu'il appartient de louer celui dont Lagrange disait, il y a plus d'un demi-siècle : *Il volera de ses propres ailes,* et qui a justifié cette glorieuse prédiction en inscrivant son nom dans l'histoire de la mécanique, immédiatement après ceux d'Archimède, de Galilée, d'Huygens et de Newton.

Le caractère distinctif de l'esprit de M. Poinsot était l'amour du

vrai et du beau sous toutes ses formes; mais il regardait les mathématiques comme la science par excellence des honnêtes gens, parce que ceux qui les cultivent ont besoin d'un langage franc et précis, sans réticence ni ambiguïté. Le géomètre digne de ce nom, qui a trouvé une idée neuve, cherche à la présenter dans les termes les plus clairs; il veut la mettre dans tout son jour, car il sait qu'elle est éternelle et qu'elle n'a rien à perdre à être vue en pleine lumière.

La clarté et la précision étaient en effet, aux yeux de M. Poinsot, l'apanage essentiel des mathématiques, et il éprouvait la répugnance la moins dissimulée pour tout ce qui ne présentait pas ce double caractère d'élégance et de simplicité qui brille à un si haut degré dans les écrits qu'il nous a laissés. Il est résulté de ce rigorisme, peut-être excessif, que bien des problèmes aujourd'hui célèbres se sont agités autour de notre illustre confrère sans réussir à attirer son attention; mais qu'importe si dans le cercle encore bien large qu'il s'est tracé dans le domaine des Archimède, des Pascal et des Newton, il a rencontré quelques-unes de ces grandes vérités qui traverseront les siècles sous la forme élégante et ferme qu'il leur a donnée. La postérité, qui ne conserve de nos travaux que ce qui est excellent et définitif, n'aura rien à retrancher à l'œuvre de M. Poinsot, et elle placera, soyons-en certains, l'auteur de la Statique, du Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des systèmes et de la Théorie nouvelle de la Rotation, à côté, peut-être au-dessus, des géomètres les plus illustres et les plus féconds de notre époque.

Pour nous, que sa présence encourageait dans nos travaux, qui nous trouvions heureux et fiers de nous dire ses confrères et ses amis, une seule pensée peut adoucir nos trop légitimes regrets : la vie de M. Poinsot a été presque toujours heureuse et toujours honorée; il a vu, bien jeune encore, les juges les plus illustres proclamer ses rares talents; sa vieillesse a reçu les plus hautes récompenses dont une grande nation dispose en faveur de ceux qui la servent et qui l'honorent, et quand, à l'âge de quatre-vingt-trois ans, la mort est venue le trouver, non le surprendre, il a pu s'endormir dans le calme d'une bonne conscience, en répétant ces paroles qu'il écrivait il y a près de quarante années : *Ma vie a été irréprochable et pure comme mes écrits.*

DISCOURS DE M. MATHIEU,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

AU NOM DU BUREAU DES LONGITUDES.

MESSIEURS,

Le Bureau des Longitudes, dont je suis l'interprete en ce moment, vient à son tour déplorer la perte cruelle qu'il a faite et rendre un dernier hommage au savant éminent qui naguère encore dirigeait ses travaux. M. Poinsot laisse un grand vide parmi nous, et son nom appartient désormais à la liste des géomètres Lagrange, Laplace, Legendre, Prony et Poisson qui ont illustré le Bureau des Longitudes. Comme eux il avait un profond attachement pour cette institution astronomique, et, jaloux de contribuer à sa réputation au dehors, il ne manquait jamais de lui communiquer ses travaux. Pendant sa longue présidence, nous avons, dans maintes occasions, admiré sa profonde sagacité et son bon sens parfait. L'aménité de son caractère, ses connaissances littéraires étendues, le charme de sa conversation, répandaient dans nos discussions un intérêt dont le souvenir vivra longtemps parmi nous. Cet esprit supérieur essentiellement philosophique portait la lumière dans les matières les plus abstraites et les rendait accessibles à tous par une exposition simple et presque géométrique. Cette tendance à voir les choses de haut pour les faire descendre ensuite aux notions les plus élémentaires, était un des traits caractéristiques du talent de M. Poinsot. Elle se manifeste dans ses ouvrages et dans ses Mémoires d'analyse, de géométrie et de mécanique. Les géometres ont pu apprécier ces rares qualités dans les travaux dont M. Poinsot a recemment enrichi la *Connaissance des Temps*. Nous citerons particulièrement : la Théorie des Cônes circulaires roulants; la Théorie de la Rotation des corps par une démonstration géométrique qui présente une image nette de cette rotation pendant tout son cours; enfin la Précession des Équinoxes. Ce phénomène, découvert par Hipparque il y a deux mille ans, expliqué par d'Alembert dans un des plus beaux ouvrages du XVIIIe siècle, M. Poinsot n'a pas craint de l'aborder à son

tour. C'est par des moyens simples et extrêmement ingénieux qu'il fait pour ainsi dire assister à la production de ce phénomène céleste qui avait tant occupé les plus grands géomètres. Ces divers travaux prouvent d'une manière éclatante que notre confrère avait conservé toute son activité intellectuelle jusqu'à la fin de sa vie. On s'étonnera peut-être de trouver chez un vieillard une aussi grande fécondité, mais c'est là, Messieurs, un des rares priviléges du génie.

Après avoir exprimé sur cette tombe entr'ouverte tous nos sentiments de haute admiration et de profonde douleur, nous adressons à notre illustre confrere un éternel adieu.

FIN DU TOME QUATRIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

80





QA
1
J684
sér.2
t.4
Physical &
Applied Sci.
Serials
Journal de mathématiques
pures et appliquées
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

